ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಪ್ರಿ-ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ

ಡಾ: ಎಂ. ವಿ. ಜಂಬುನಾಥನ್



ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ಸಂಸ್ಥೆ : : ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ಸಂಸ್ಥೆ ಪ್ರಕಟಣೆ – ೯೨
ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮಾಲೆ – ೧೬೨

ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕ
ಡಾ. ಹಾ. ಮಾ. ನಾಯಕ

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ

ಭಾಗ ೨

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ಸಂಸ್ಥೆ ಪ್ರಕಟಣೆ – ೯೨

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮಾಲೆ – ೧೬೨

ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕ

ಡಾ. ಹಾ. ಮಾ. ನಾಯಕ

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ

ಭಾಗ ೨

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ

ಭಾಗ ೨

ಡಾ. ಎಂ. ವಿ. ಜಂಬುನಾಥನ್



ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ಸಂಸ್ಥೆ

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

1976

SAMKHYASHASTRA PARICHAYA—Bhaga 2 (Introduction to Statistics—Part II) by Dr. M. V. Jambunathan; Published by the Institute of Kannada Studies, University of Mysore, Manasa Gangotri, Mysore-570 006. First edition 1976 ; pp. viii+244.

Published under the centrally sponsored scheme of production of books and literature in regional languages at the university level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

ಬೆಲೆ : ರೂ. 10-00

ಮಾರಾಟಗಾರರು : ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಪ್ರಸಾರಾಂಗ, ಮಾನಸಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು-570 012
ಮುದ್ರಕರು : ಶ್ರೀ ಶಕ್ತಿ ಎಲೆಕ್ಟ್ರಿಕ್ ಪ್ರೆಸ್, ಜಯನಗರ, ಮೈಸೂರು-570 009

ಮುನ್ನುಡಿ

ಎರಡು ವರ್ಷದ ಪ್ರಿ-ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಶಿಕ್ಷಣವ್ಯವಸ್ಥೆ ಜಾರಿಗೆ ಬಂದುದರಿಂದ ಈ ಶಿಕ್ಷಣದ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುವ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಹಾಕಿಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಲೇಖಕರ, ಪರಾಮರ್ಶಕರ, ಹಲವು ವಿಭಾಗಮುಖ್ಯರ ಹಾಗೂ ಅಚ್ಚುಕೂಟದವರ ಸಹಾಯ ಸಹ ಕಾರದಿಂದ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಎಲ್ಲ ವಿಷಯಗಳಿಗೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಗ್ರಂಥಗಳನ್ನು ಹೊರತರಲು ಸಾಧ್ಯವಾದುದು ನಮಗೆ ಸಂತೋಷವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದೆ. ಸಂಸ್ಥೆಯ ಈ ಪ್ರಕಟಣೆ ಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ, ಅಧ್ಯಾಪಕರೂ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದ ಸ್ವಾಗತಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಕನ್ನಡವನ್ನು ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನಾಗಿ ಹಾಗೂ ಪರೀಕ್ಷಾ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನಾಗಿ ಆಯ್ದು ಕೊಳ್ಳುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ದಿನೇ ದಿನೇ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವುದು ಸಂತೋಷದ ಸಂಗತಿ ಯಾಗಿದೆ. ಅವರಿಗೆಲ್ಲ ಈ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಂಬಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ ಹೊರಬರುತ್ತಿರುವ 'ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ–ಭಾಗ ೨' ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷದ ಪ್ರಿ-ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಐಚ್ಛಿಕ ವಿಷಯವಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನಮಾಡುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಪಠ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕನುಸಾರ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆದುಕೊಟ್ಟಿರುವವರು ನಿವೃತ್ತ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾದ ಡಾ. ಎಂ. ವಿ. ಜಂಬುನಾಥನ್ ಅವರು. ಅವರಿಗೂ, ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಮುದ್ರಣಕಾರ್ಯ ದಲ್ಲಿ ಸಹಕರಿಸಿರುವ ಭಾಷಾಂತರ ಮತ್ತು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ವಿಭಾಗದ ಶ್ರೀ ಎಸ್. ಲಕ್ಷ್ಮೀ ನಾರಾಯಣ್ ಮತ್ತು ಶ್ರೀ ಕೆ. ಜಿ. ಪ್ರಕಾಶ್ ಅವರಿಗೂ ನಮ್ಮ ವಂದನೆಗಳು ಸಲ್ಲುತ್ತವೆ.

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ಸಂಸ್ಥೆ
ಮಾನಸಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು-೬

ಹಾ. ಮಾ. ನಾಯಕ
ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕ

ಪೀಠಿಕೆ

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಸರಳಭಾಗಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಈ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷದ ಪಠ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿವಿಧ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನೂ ಪ್ರಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಚೆನ್ನಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನೂ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೂ ಸಮೃದ್ಧಿಯಾಗಿ ಸೇರಿಸಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆಯಲು ನನಗೆ ಕರೆಯಿತ್ತು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಗ್ರಂಥ ರಚನೆಗೆ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಟ್ಟದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ನಾನು ಆಭಾರಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಕುಂದುಕೊರತೆಗಳನ್ನು ನನಗೆ ತಿಳಿಯಪಡಿಸುವ ವಾಚಕರಿಗೆ ನಾನು ಕೃತಜ್ಞನಾಗಿರುವೆನು. ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸುವ ಸಲಹೆಗಳಿಗೆ ಸದಾ ಸ್ವಾಗತವಿದೆ.

ಎಂ. ವಿ. ಜಂಬುನಾಥನ್

ಕನ್ನಡ ರಾಜೋತ್ಸವದ ದಿನ

೧–೧೧–೧೯೭೬

ಪರಿವಿಡಿ



ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಕ್ರಮಚಯಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಚಯಗಳು

1·1

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಚಯಗಳ (permutations) ಅಥವಾ ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಮತ್ತು ಸಂಚಯಗಳ (combinations) ಅಥವಾ ಆಯ್ಕೆಗಳ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಮೊದಲು ಈ ಪದಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

1·2 ಕ್ರಮಚಯ

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯವೆಂದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಹಲವನ್ನು ಅಥವಾ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವಿನ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದು, ಅಥವಾ ಯೋಜಿಸುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಎಂಬ ಹೆಸರೂ ಉಂಟು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ a, b, c ಎಂಬ ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳಿವೆ ಎನ್ನೋಣ. ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೂ ಎರಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಾವು 6 ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು :

$$ab, ba, ac, ca, bc, cb$$

ಕ್ರಮಚಯ ab ಮತ್ತು ಕ್ರಮಚಯ ba ಇವು ಬೇರೆಯಾಗಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೊದಲನೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮ ಎರಡನೆಯದಕ್ಕಿಂತ ಬೇರೆಯಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೆ ಎರಡರಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 6. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ${}_3P_2$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ${}_3P_2 = 6$. ಕ್ರಮಚಯವನ್ನು ಅಂಕಪಾಶವೆಂತಲೂ ಕರೆಯುವುದುಂಟು.

n ಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು r-ವಿನ್ಯಾಸ ಅಥವಾ ಕ್ರಮಚಯವನ್ನು $r \leq n$ ಇದ್ದಾಗ, n ವಸ್ತುಗಳ r-ಕ್ರಮಚಯವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.

n ವಸ್ತುಗಳಿಂದಾಗತಕ್ಕ r-ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, n ವಸ್ತುಗಳ ಪೈಕಿ ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೆ r ನ್ನು ಬಳಸಿದ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ${}_nP_r$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುವರು. ವಸ್ತುಗಳ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಚಯಿಸಿದ್ದೇವೆ ಎನ್ನುವರು.

1·3 ಸಂಚಯ

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಸ್ತುಗಳ ಪೈಕಿ ಕೆಲವನ್ನು ಅಥವಾ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಅನುಕ್ರಮ ಅಥವಾ ಆನುಪೂರ್ವಿಗೆ ಲಕ್ಷ್ಯಕೊಡದೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ವಸ್ತುಗಳ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಸಂಚಯ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನೇ ಕೆಲವರು ವಿಕಲ್ಪ ಎಂತಲೂ ಹೇಳುವರು.

a, b, c ಎಂಬ ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳಿದ್ದರೆ ಸಲಕ್ಕೆ 2 ರಂತೆ ಈ ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಚಯಗಳು ab, bc, ca ಆಗುತ್ತವೆ.

ಹೀಗೆ, ಸಲಕ್ಕೆ 2ರಂತೆ 3 ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3; ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ${}_3C_2$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ${}_3C_2 = 3$.

ಸಲಕ್ಕೆ 2ರಂತೆ ಈ ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳು 6 ಇವೆ; ಅಂದರೆ ab, bc, ca, cb, ac, ba ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಆದರೆ ಸಂಚಯದಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮ ಅಪ್ರಕೃತವಾದ್ದರಿಂದ ab, ba ಸಂಚಯಗಳು ಸಮಸಮವಾಗುತ್ತವೆ; ಇದರಂತೆಯೆ; bc, cb ಸಂಚಯಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ac, ca ಸಂಚಯಗಳು ಸಮ. n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಮಾಡಬಹುದಾದ r ವಸ್ತುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಚಯ ಅಥವಾ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ($n \geqslant r$ ಆದಾಗ) n ವಸ್ತುಗಳ r-ಸಂಚಯ ಎನ್ನುವರು.

n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಮಾಡಬಹುದಾದ r-ಸಂಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿಸಲ r-ರಂತೆ n ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಹಾಗೂ ಇದನ್ನು ${}_nC_r$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೂ rರಂತೆ n ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೂ r-ರಂತೆ n ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ; ಅಂದರೆ ${}_nP_r \geqslant {}_nC_r$.

ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೂ ಒಂದರಂತೆ n ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಮತ್ತು ಸಂಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ n ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$${}_nP_1 = {}_nC_1 = n$$

ಹಾಗೂ n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ 0 ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ (ಅಂದರೆ ಒಂದನ್ನೂ ಆರಿಸದೆ ಇರುವ) ವಿಧ 1 ಆಗಿದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ${}_nC_0 = 1$.

1·4

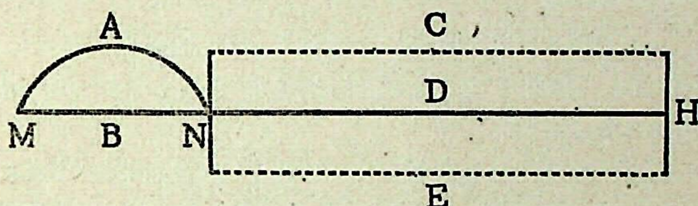
ಕ್ರಮಚಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಸಂಚಯಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲು ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನೆರವಾಗುತ್ತವೆ.

ಮದ್ರಾಸಿನಿಂದ ನವದೆಹಲಿಗೆ ಎರಡು ಮಾರ್ಗಗಳಿವೆ; ಮತ್ತು ನವದೆಹಲಿಯಿಂದ

ಹರಿದ್ವಾರಕ್ಕೆ ಮೂರು ಮಾರ್ಗಗಳಿವೆ. ಒಬ್ಬ ಪ್ರವಾಸಿಗ ಮದ್ರಾಸಿನಿಂದ ಹೊರಟು ನವದೆಹಲಿಯ ಮಾರ್ಗವಾಗಿ ಹರಿದ್ವಾರಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಹೋಗಬಹುದು ?

ಮದ್ರಾಸ್, ನವದೆಹಲಿ ಮತ್ತು ಹರಿದ್ವಾರಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಾಗತವಾಗಿ M, N ಮತ್ತು H ಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ ಮತ್ತು M ನಿಂದ N ಗೆ ಹೋಗುವ ಮಾರ್ಗಗಳು A, B ಆಗಿರಲಿ, ಮತ್ತು N ನಿಂದ H ಗೆ ಹೋಗುವ ಮಾರ್ಗಗಳು C, D, E ಆಗಿರಲಿ.

ಪ್ರವಾಸಿಗನು ಮದ್ರಾಸಿನಿಂದ ನವದೆಹಲಿಗೆ Aಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಮುಂದೆ ಮೂರು ಮಾರ್ಗಗಳಾದ C, D ಅಥವಾ Eಯ ಮೂಲಕ ಅವನು ಇಷ್ಟಪಟ್ಟಂತೆ ಹರಿದ್ವಾರವನ್ನು ಸೇರಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.1

ಆದರೆ ಮದ್ರಾಸಿನಿಂದ ನವದೆಹಲಿಗೆ B ಮಾರ್ಗವಾಗಿ ಹೋಗುವುದು ಅವನಿಗೆ ಇಷ್ಟವಾದರೆ, ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಮೂರರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಮಾರ್ಗದ ಮೂಲಕ ಅವನು ಮುಂದುವರಿದು ಹರಿದ್ವಾರದ ಪ್ರಯಾಣವನ್ನು ಮುಗಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಮದ್ರಾಸಿನಿಂದ ನವದೆಹಲಿಯ ಮೂಲಕ ಹರಿದ್ವಾರಕ್ಕೆ ಪ್ರವಾಸಿಗ 6 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣವನ್ನು ಬೆಳಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾರ್ಗಗಳ ಸಂಚಯಗಳು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

$$A+C,\ A+D,\ A+E,\ B+C,\ B+D,\ B+E$$

1·5 ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಫಲವನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಬಹುದು

M ನಿಂದ N ಗೆ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಲು m ದಾರಿಗಳಿದ್ದರೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದರ ಮೂಲಕ M ನಿಂದ N ಗೆ ಒಬ್ಬನು ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿದಾಗ, N ನಿಂದ H ಗೆ ಮುಂದೆ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಲು n ದಾರಿಗಳಿರುವುವಾದರೆ, ಆಗ M ನಿಂದ H ಗೆ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಲು $m \times n$ ದಾರಿಗಳಿವೆ.

ಇದು ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ವ್ಯಾಪಕ ಪ್ರಮೇಯದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಕೆಲಸ ಅಥವಾ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು m ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಾದರೆ ಮತ್ತು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರೈಸಿದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು n ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ಸಂಭವವಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಆ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ $m \times n$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೆರವೇರಿಸಿದಾಗ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಕೆಲವು ಸರಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ಮೈಸೂರು ಮತ್ತು ಮಂಡ್ಯಗಳ ನಡುವೆ ನಾಲ್ಕು ಬಸ್ಸುಗಳು ಓಡಾಡುತ್ತವೆ. ಒಬ್ಬನು ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೈಸೂರಿನಿಂದ ಮಂಡ್ಯಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಬೇರೊಂದು ಬಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಹಿಂತಿರುಗಿ ಬರಬಹುದು?

ಮೈಸೂರಿನಿಂದ ಮಂಡ್ಯಕ್ಕೆ ಹೋಗಲು ನಾಲ್ಕು ರೀತಿಗಳಿವೆ, ಏಕೆಂದರೆ ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಸ್ಸುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಅವನು ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ ಈ ನಾಲ್ಕು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಅವನಿಗೆ ಹಿಂತಿರುಗಿ ಬರಲು 3 ವಿಧಗಳಿವೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ ಉಳಿದ ಮೂರು ಬಸ್ಸುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದರಲ್ಲಾದರೂ ವಾಪಸು ಬರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟು ಮಂಡ್ಯಕ್ಕೆ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿ ಹಿಂತಿರುಗಲು ಇರುವ ರೀತಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $4 \times 3 = 12$.

2 ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ 3 ಕೋಟುಗಳು, 2 ಟೊಪ್ಪಿಗೆಗಳೂ ಮತ್ತು 5 ಷರಾಯಿಗಳಿವೆ. ಅವನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಉಡುಪನ್ನು ಧರಿಸಬಹುದು ?

ಅವನು ಷರಾಯಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸಲು 5 ವಿಧಾನಗಳಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, 5 ಷರಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ ಅವನು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಆರಿಸಬಹುದು, ಮತ್ತು ಈ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ 3 ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಕೋಟನ್ನು ಆರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನು ಷರಾಯಿ ಮತ್ತು ಕೋಟುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಲು ಇರುವ ವಿಧಾನಗಳು $5 \times 3 = 15$.

ಪುನಃ ಷರಾಯಿ ಮತ್ತು ಕೋಟುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ 15 ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಟೊಪ್ಪಿಗೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಲು ಎರಡು ವಿಧಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನು ಉಡುಪನ್ನು ಧರಿಸಲು ಇರುವ ರೀತಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $15 \times 2 = 30$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1·1

1 ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಮದ್ರಾಸು ಮತ್ತು ಬೆಂಗಳೂರಿನ ನಡುವೆ ರೈಲುಗಾಡಿ

ಯಲ್ಲಿ, ಮೋಟಾರಿನಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ವಿಮಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಬೆಂಗಳೂರಿನಿಂದ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ಅವನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಹೋಗಿ ಹಿಂತಿರುಗಿ ಬರಬಹುದು?

2 ಮದ್ರಾಸಿನಿಂದ ದೆಹಲಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ವಿಮಾನ ಮಾರ್ಗಗಳಿವೆ. ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ವಿಮಾನದ ಮೂಲಕ ಮದ್ರಾಸಿನಿಂದ ದೆಹಲಿಗೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡ ಬಲ್ಲನು ? ಮತ್ತು (i) ಅದೇ ಮಾರ್ಗದಿಂದ, (ii) ಬೇರೆ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಹಿಂತಿರುಗಿ ಬರಲು ಸಾಧ್ಯ ?

3 Aಯು ಬೇರೆ ಬೇರೆ 3 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು Bಯು 4 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವರು. ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ A ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲೊಂದನ್ನು Bಯ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದೊಂದಿಗೆ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲನು ?

4 ಆಲನಹಳ್ಳಿಯಿಂದ ಭೀಮನಹಳ್ಳಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ದಾರಿಗಳಿವೆ. ಹಾಗೂ ಭೀಮನ ಹಳ್ಳಿಯಿಂದ ಶಿವನಹಳ್ಳಿಗೆ 5 ದಾರಿಗಳಿವೆ. ಆಲನಹಳ್ಳಿಯಿಂದ ಶಿವನಹಳ್ಳಿಗೆ ಭೀಮನ ಹಳ್ಳಿಯ ಮೂಲಕ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಹೋಗಲು ಸಾಧ್ಯ ?

5 ತಮ್ಮಲ್ಲಿ ಯಾರನ್ನೂ ಬಿಡದೆ ಹೊಸವರ್ಷದ ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ಒಬ್ಬರಿಂದೊಬ್ಬ ರಿಗೆ ಕಳುಹಿಸಬೇಕೆಂದು 6 ಜನ ಸ್ನೇಹಿತರು ಬಯಸುವರು. ಹಾಗಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಕಾರ್ಡುಗಳು ಬೇಕಾಗುವುದು ?

6 ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮುಂದೆ ಕಾಣಿಸಿದ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ತನ್ನ ದ್ವಿತೀಯ ಭಾಷೆಯನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು : ಕನ್ನಡ, ಸಂಸ್ಕೃತ, ತಮಿಳು, ತೆಲುಗು, ಹಿಂದಿ, ಪರ್ಷಿಯನ್ ಮತ್ತು ಅರೇಬಿಕ್. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದ್ವಿತೀಯಭಾಷೆ ಯಾಗುಳ್ಳದ್ದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಐಚ್ಛಿಕ ಭಾಷೆಯನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅವನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ದ್ವಿತೀಯ ಮತ್ತು ಐಚ್ಛಿಕ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಆರಿ ಸಲು ಸಾಧ್ಯ ?

1·6 ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೆ r ನಂತೆ n ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

n ವಸ್ತುಗಳ ಪೈಕಿ ಪ್ರತಿ ಸಲಕ್ಕೆ rರಂತೆ ಅಣಿಮಾಡಬಹುದಾದ ಕ್ರಮಚಯ ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ಖಾಲಿ ಖಾನೆಗಳನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.

r ಖಾಲಿ ಖಾನೆಗಳನ್ನು n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ತುಂಬಬೇಕೆಂದಿರಲಿ.

1	2	3	4	. . . . .	r

ಮೊದಲನೇ ಖಾನೆಯನ್ನು n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಬಹುದು. ಮೊದಲನೆಯ ಖಾನೆಯನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡುವ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧಾನಕ್ಕೂ ಎರಡನೆಯ ಖಾನೆಯನ್ನು $(n-1)$ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತುಂಬಲು $n(n-1)$ ವಿಧಗಳಿವೆ. ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಖಾನೆಗಳನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧಾನಕ್ಕೂ ಮೂರನೆಯ ಖಾನೆಯನ್ನು ತುಂಬಲು $(n-2)$ ವಿಧಗಳಿವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಮೂರು ಖಾನೆಗಳನ್ನು ತುಂಬಲು ಒಟ್ಟು $n(n-1)(n-2)$ ವಿಧಾನಗಳಿವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ತರ್ಕಿಸುತ್ತ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು; ಅಂದರೆ, r ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಲು ಇರುವ ವಿಧಾನಗಳು

$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

ಮಾರ್ಗಾಂತರ ಸಾಧನೆ

n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಿಧದಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಖಾನೆಯನ್ನು ತುಂಬಬಹುದು, ಮತ್ತು ಈ n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದ ಅನಂತರ, ಉಳಿದ $(r-1)$ ಖಾನೆಗಳನ್ನು ಉಳಿದ $(n-1)$ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ $_{n-1}P_{r-1}$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲ ಖಾನೆಗಳನ್ನೂ ಭರ್ತಿಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ವಿಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n \times {}_{n-1}P_{r-1}$;

ಅಂದರೆ, ವಿಧಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $_nP_r$ ಆಗಿದೆ;

$$\therefore {}_nP_r = n \times {}_{n-1}P_{r-1}$$

ಇದರಂತೆಯೆ, $${}_{n-1}P_{r-1} = (n-1)\,{}_{n-2}P_{r-2}$$

$${}_{n-2}P_{r-2} = (n-2)\,{}_{n-3}P_{r-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_{n-r+2}P_{r-(r-3)} = (n-r+2) \times {}_{n-r+1}P_{r-(r-1)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಗ್ರ ಗುಣಿಸಲು ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದಗಳನ್ನು ಕಡಿದುಹಾಕಲು

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r-2)\,{}_{n-r+1}P_1.$$

ಒಂದರಲ್ಲೊಂದನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೂ ಸಹ ಇದೇ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರೆಯುವುದು.

ಆದರೆ, ${}_{n-r+1}P_1 = (n-r+1)$

ಏಕೆಂದರೆ $n-r+1$ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ 1 ಖಾನೆಯನ್ನು ತುಂಬಲು $(n-r+1)$ ವಿಧಗಳಿರುವುವು.

$$\therefore {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

ಮತ್ತೊಂದು ಮಾರ್ಗಾಂತರ ಕ್ರಮ

r ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ $(r-1)$ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ${}_nP_{r-1}$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳ ಮತ್ತು $n-(r-1)$ ಅಂದರೆ $n-r+1$ ವಸ್ತುಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆ.

ಈ ಕೊನೆಯ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳವನ್ನು $(n-r+1)$ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ $(n-r+1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡಬಹುದಾದ ವಿಧಾನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ${}_nP_{r-1} \times (n-r+1)$. ಆದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ${}_nP_r$ ಗೆ ಸಮ.

ಆದ್ದರಿಂದ ${}_nP_r = (n-r+1) \times {}_nP_{r-1}$

ಹೀಗೆಯೆ, ${}_nP_{r-1} = (n-r+2) \times {}_nP_{r-2}$

${}_nP_{r-2} = (n-r+3) \times {}_nP_{r-3}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

${}_nP_2 = (n-1) \times {}_nP_1$

$$\therefore {}_nP_r = (n-r+1)(n-r+2)(n-r+3)\cdots(n-1) \times {}_nP_1$$

ಆದರೆ ${}_nP_1 = n$.

$$\therefore {}_nP_r = (n-r+1)(n-r+2)\cdots(n-1)\,n.$$

ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ r ಅಪವರ್ತನಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅನುಮಿತ 1 ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $r = n$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೆ ಸಮಗ್ರವಾಗಿ n ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ,

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot2\cdot1$$

ಗುಣಲಬ್ಧ $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot1$, ಅಂದರೆ ಪ್ರಥಮ n ಪ್ರಾಕೃತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕ್ರಮಗುಣಿತ (factorial) n ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇದನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $\lfloor n$ ಅಥವಾ $n!$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಮುದ್ರಣದ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ! ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ).

ಈ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು,

$${}_nP_n = n!$$

ಅನುಮಿತ 2 ${}_nP_r$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕ್ರಮಗುಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

ಅಂದರೆ, ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

ಅನುಮಿತ 3 ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $r = n$ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ,

$${}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

ಆದರೆ ಅನುಮಿತ (1) ರಿಂದ, ${}_nP_n = n!$

ಆದ್ದರಿಂದ $0! = 1$ ಎಂದಾಗಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಮೇರೆಗೆ $0!$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆ ಅರ್ಥಹೀನವಾದರೂ ಅದರ ಅರ್ಥ 1 ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಂತಾಯಿತು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೆ 4 ಅಕ್ಷರದಂತೆ number ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸಬಹುದು? ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧಾನಗಳು m ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವುವು?

number ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿ 6 ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ.

ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೆ 4 ರಂತೆ 6 ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಚಯ ಸಂಖ್ಯೆ $= {}_6P_4$

$$= 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$$

4 ಅಕ್ಷರಗಳ ಒಂದು ವಿನ್ಯಾಸ m ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರಥಮ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತುಂಬಲು ಒಂದೇ ಒಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ಅದು ಯಾವುದೆಂದರೆ ಆ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ mನ್ನು ಹಾಕುವುದು. ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಉಳಿದ 5 ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದರಿಂದ ತುಂಬಬಹುದು. ಅಂದರೆ 5 ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ತುಂಬಬಹುದು.

ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧಾನಕ್ಕೂ ಮೂರನೆಯ ಸ್ಥಳವನ್ನು ತುಂಬಲು 4 ವಿಧಗಳಿವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಮೂರು ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬಲು 5×4 ವಿಧಗಳಿವೆ. ಮೊದಲನೇ ಮೂರು ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ತುಂಬುವ ರೀತಿಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ 4 ನೆಯ ಸ್ಥಳವನ್ನು ತುಂಬಲು ಮೂರು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಲ್ಕು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನೂ ತುಂಬಲು $5 \times 4 \times 3$ ವಿಧಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿ ಸಲಕ್ಕೆ 4 ರಂತೆ m ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು 60 ಇವೆ. ಮಾರ್ಗಾಂತರವಾಗಿ ನಾವು ಈ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು. m ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಕ್ರಮಚಯಗಳು x ಇದ್ದರೆ, n, u, b, e, r ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ x ಕ್ರಮಚಯಗಳಿವೆ. ಹೀಗೆ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $6x$. ಆದರೆ,ಇದು ${}_6P_4$ ಗೆ ಸಮ.

$$\therefore 6x = {}_6P_4 ; \; x = {}_6P_4 \div 6 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

ಅಂದರೆ, m ನಿಂದ ಆರಂಭವಾಗುವ ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $= 60$.

2 ಬೆಸ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರಗಳು ಬರುವಂತೆ given ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು ?

ದತ್ತಪದದಲ್ಲಿ 3 ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರಗಳೂ 2 ಸ್ವರಾಕ್ಷರಗಳೂ ಇವೆ. 3 ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಮೊದಲನೇ, ಮೂರನೇ ಮತ್ತು ಐದನೇ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ 3! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಚಯ ಮಾಡಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಎರಡು ಸ್ವರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ 2! ವಿಧಗಳಿಂದ ವಿನ್ಯಾಸಮಾಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರಗಳು ಬೆಸ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿರುವಂತೆ 5 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ವಿನ್ಯಾಸಮಾಡುವ ಒಟ್ಟು ವಿಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$.

3 ಯಾವ ಇಬ್ಬರು ಹುಡುಗಿಯರೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಇರದಂತೆ, 5 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 3 ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು ಸಾಲಾಗಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು ?

ಹುಡುಗರನ್ನು 5 ! ವಿಧದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಕೂರಿಸಬಹುದು.

B B B B B. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎಂದು ಗುರುತಿಸುವ ಆರು ಜಾಗ

ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ 3 ರಲ್ಲಿ ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು ಕೂರಿಸಿದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿಬಂಧನೆ ಯನ್ನು ಪಾಲಿಸಿದಂತಾಗುವುದು.

$$1 \quad B \quad 2 \quad B \quad 3 \quad B \quad 4 \quad B \quad 5 \quad B \quad 6$$

ಈ 6 ಜಾಗಗಳಲ್ಲಿ 3 ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು $_6P_3$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು ಕೂರಿಸಬಹುದಾದ ಒಟ್ಟು ವಿಧ ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $5! \times {}_6P_3 = 14400$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1·2

1 ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(a) $_4P_2$, $_5P_3$, $_6P_4$, $_7P_2$, $_8P_6$, $_{10}P_3$, $_8P_8$

(b) $3!$, $5!$, $8!$, $4! \times 6!$, $7! \div 2!$, $10! \div 5!$

2 'ಬೀಜಗಣಿತ' ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು ?

3 (i) ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೆ 4 ರಂತೆ (ii) ಪ್ರತಿಸಲ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು 'ಸಲಕರಣೆ' ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು ?

4 'ನಿಜಗುಣ ಶಿವಯೋಗಿ' ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ 6 ಅಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ಪದಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು ?

5 4, 5, 6, 7, 8, 9 ಈ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 4 ಅಂಕಗಳಿರು ವಂತೆ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ?

6 ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಿಲ್ಲದೆ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎನ್ನುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 2000 ಮತ್ತು 4000 ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ರಚಿಸಬಹುದು ?

7 ಒಂದು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಘದ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ 7 ಜನ ಸದಸ್ಯರು ಭಾಗವಹಿಸಲಿರುವರು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟು ಮಾತು ಗಾರರ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿನ್ಯಾಸಮಾಡಬಹುದು ?

(a) A ಎಂಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ B ಮಾತನಾಡಿದ ತಕ್ಷಣ ಮಾತನಾಡುವನು.

(b) B ಮಾತನಾಡಿದ ಅನಂತರ A ಮಾತನಾಡತಕ್ಕದ್ದು.

(c) B ಗಿಂತ ಮುಂಚೆ A ಮಾತನಾಡುವುದಿಲ್ಲ.

8 ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ನಿಗದಿಯಾಗಿರುವ 6 ಪತ್ರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಗಣಿತದ ಪತ್ರಿಕೆಗಳಾಗಿವೆ. ಆ ಎರಡು ಗಣಿತದ ಪತ್ರಿಕೆಗಳು ಕ್ರಮಾಗತವಾಗಿ ಬರದಂತೆ ಪತ್ರಿಕೆಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ವಿನ್ಯಾಸಮಾಡಬಹುದು ?

9 'ನವನಿಧಿ' ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಚಯಿಸಿದಾಗ ರಚಿತವಾಗುವ ಪದಗಳನ್ನು ನಿಘಂಟುವಿನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಆ ಪದ ಎಷ್ಟನೆಯದಾಗುವುದು ?

10 'ನಾಮಕರಣ' ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿನ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾಡಿದ ಕ್ರಮಚಯಗಳನ್ನು ನಿಘಂಟಿನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಅಕಾರಾದಿ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ 'ರಣಮನಾಕ' ಎಂಬುದು ಎಷ್ಟನೆಯ ಪದವಾಗುವುದು ?

1·7 ಒಂದೇ ತರಹೆಯ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳಿರುವಾಗ n ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳು

ಇಷ್ಟರವರೆಗೆ ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳನ್ನು ಅವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಿಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳಾದಾಗ, ಅಂದರೆ ಬೇರೆಬೇರೆಯಾಗಿದ್ದಾಗ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳು ಒಂದೇ ತರಹೆಯದಾಗಿರಬಹುದು ; ಅಂದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿಲ್ಲದಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ maximum ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

7 ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ 3 ಒಂದೇ ತರಹೆಯ ಅಕ್ಷರಗಳಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ m ಗಳು ಉಳಿದವುಗಳು ವ್ಯತ್ಯಾಸವುಳ್ಳದ್ದಾಗಿವೆ. ಈ 7 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಚಯಿಸಿದ್ದೇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕ್ರಮಚಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ mummixa. ಈ 3 m ಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ 1ನೆಯ ಸ್ಥಾನ, 3 ನೆಯ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು 4 ನೆಯ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ತುಂಬುವಂತೆ ಅವುಗಳನ್ನು 3 ! ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಕ್ರಮಚಯಿಸಬಹುದು.

m *u m* m *i x a*
m *u* m *m i x a*
m u **m** m *i x a*
m u m **m** *i x a*
m *u* **m** *m i x a*
m *u m* **m** *i x a*

ಹೀಗೆ 3 m ಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುವಾಗ ಏರ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಕ್ರಮಚಯದಿಂದ ಆ 3 m ಗಳು ಭಿನ್ನವಾದಾಗ 3 ! ಕ್ರಮಚಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಭಿನ್ನವಾದ 3 m ಗಳು ವ್ಯತ್ಯಾಸರಹಿತವಾದಾಗ 3 ! ಕ್ರಮಚಯಗಳು ಏಕೀಭವಿಸಿ ಒಂದೇ ಕ್ರಮಚಯವಾಗುತ್ತದೆ.

m ಗಳೆಲ್ಲ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾದಾಗ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ X ಆದರೆ, m ಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದಾಗ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ 3 ! ಕ್ರಮಚಯ ಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲ ವಿಧವಾದ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $X \times 3\,!$ ಆಗುವುದು. ಆದರೆ, 3mಗಳು ಬೇರೆಬೇರೆಯಾದಾಗ ಒಟ್ಟನಲ್ಲಿ 7 ಅಕ್ಷರ ಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 7!.

ಆದ್ದರಿಂದ $X \times (3\,!) = 7\,!$

$$\therefore X = \frac{7\,!}{3\,!} = 840$$

ಈಗ ನಾವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ವ್ಯಾಪಕ ಪಕ್ಷವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಒಟ್ಟು n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ p ವಸ್ತುಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯದ್ದಾಗಿರಲಿ, ಮತ್ತು ಈ n ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ X ಆಗಿರಲಿ. p ಸಜಾತೀಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ, ಮೊದಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಮಚಯವೂ $p\,!$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ರಮಚಯಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ p ಸಜಾತೀಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ, ಎಲ್ಲ X ಕ್ರಮಚಯಗಳಿಂದಲೂ $(p\,!) \times X$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ರಮಚಯಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ವಸ್ತುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಯಾದಾಗ n ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $n\,!$.

ಆದ್ದರಿಂದ $(p\,!) \times X = n\,!$

$$\therefore X = \frac{n\,!}{p\,!}$$

ಇದೇ ರೀತಿ, ಇತರ q ವಸ್ತುಗಳು ಸಜಾತೀಯವಾದಾಗ, ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{n\,!}{p\,!\,q\,!}$ ಆಗುವುದು.

ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಿದರೆ ಈ ಫಲವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ p ಸಜಾತೀಯವಾಗಿದ್ದು, ಇತರ q ಸಜಾತೀಯವಾಗಿದ್ದು, ಬೇರೆ r ವಸ್ತುಗಳು ಸಜಾತೀಯವಾಗಿದ್ದು, ... n ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1 **minimise** ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಪದ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

3–iಗಳು 1–n

2–mಗಳು 1–s

1–e

ಒಟ್ಟು 8 ಅಕ್ಷರಗಳು ಇವೆ.

ಬೇಕಾದ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{8!}{2!\,3!} = 3360$

2 ANNAMALAI ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಸಲ ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು A ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತವೆ ?

(ii) A ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ L ನಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುವೆಷ್ಟು ?

ANNAMALAI ಎಂಬುದು ಈ ಕೆಳಗಿನ 9 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.

4–Aಗಳು 1–M

1–I 2–N ಗಳು

1–L

∴ ಎಲ್ಲವನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಈ 9 ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$\frac{9!}{4!\,2!} = 7560$$

(i) Aಯನ್ನು ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, 8 ಅಕ್ಷರಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 3A ಮತ್ತು 2N ಗಳು; ಉಳಿದವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಕ್ಷರಗಳು. ಈ 8 ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{8!}{3!\,2!} = 3360$

A ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಕ್ರಮಚಯಗಳು 3660 ಇವೆ.

(ii) ಮೊದಲನೇ ಅಕ್ಷರ A ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಅಕ್ಷರ L ಆದರೆ, ಉಳಿದ 7 ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಭರ್ತಿ ಮಾಡಲು ಇತರ 7 ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ. ಈ 7 ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ, A ಗಳು 3, N ಗಳು 2, ಉಳಿದವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ. ಈ 7 ಅಕ್ಷರಗಳ ನಾನಾ ವಿಧದ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{7!}{3!\,2!} = 420$.

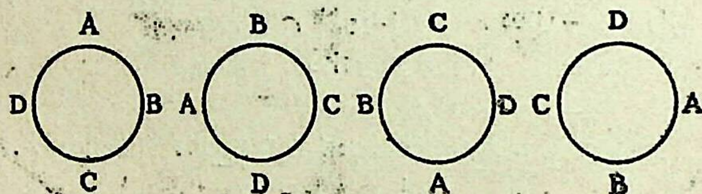
ಆದ್ದರಿಂದ A ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ L ನಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 420.

1·8 ವರ್ತುಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳು

ಪ್ರಥಮ ಮತ್ತು ಅಂತಿಮ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವಿನ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳನ್ನು ಇಷ್ಟರವರೆಗೆ ಪರಿಗಣಿಸಿದೆವು. ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಳ ಕ್ರಮ ಚಯಗಳೆಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ಕೆಲವು ವೇಳೆ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಲೂ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ಸ್ಥಾನ ಅಥವಾ ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ ಎಂಬು ವುದು ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಸ್ಥಾನಗಳು ಉಳಿದವುಗಳಿಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿರುವುವಷ್ಟೆ.

ವರ್ತುಳದ ಸುತ್ತಲಿನ ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳಿಗೆ ಚಕ್ರೀಯ ಕ್ರಮಚಯಗಳು ಅಥವಾ ವರ್ತುಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳು (circular permutations) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಲೂ ಅಳವಡಿಸಿದ A, B, C, D ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. 4 ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸ್ಥಾನಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. ಆದರೆ ಮೇಲುಗಡೆ ಇರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಮೊದಲ ನೆಯದೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ 4 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸರಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳು ಲಭಿಸುವುವು.



ಚಿತ್ರ 1.2

ಅಂದರೆ ಒಂದು ವರ್ತುಳ ಕ್ರಮಚಯದಿಂದ 4 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸರಳ ಕ್ರಮಚಯ ಗಳು ಲಭಿಸುತ್ತವೆ. X ವರ್ತುಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳಿದ್ದರೆ, $4X$ ಸರಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. 4 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡುವ ರೇಖೀಯ ಅಥವಾ ಸರಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ${}_4P_4$.

ಆದ್ದರಿಂದ $4X = {}_4P_4$, ಅಂದರೆ $X = \frac{1}{4}\,{}_4P_4 = 3!$

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ, n ಅಕ್ಷರಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ತುಳ ಕ್ರಮಚಯವೂ n ಭಿನ್ನ ವಾದ ರೇಖೀಯ ಕ್ರಮಚಯಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆಯೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$n \times X = {}_nP_n = n!$$

n ವಸ್ತುಗಳಿಂದಾದ ವರ್ತುಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು X ಸೂಚಿಸುವುದು.

$$\therefore X = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

ಅನುಮಿತ : ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ಮತ್ತು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡದಿದ್ದರೆ, n ವಸ್ತುಗಳ ವರ್ತುಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{(n-1)!}{2}$ ಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1·3

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳ ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1 ARRANGE 2 POSSESSES

3 MISSISSIPPI 4 MAMALLAPURAM

5 'ವಿಕಟಕವಿರಾಯ' ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಚಯಿಸಬಹುದು ? ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 'ವಿ' ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವುದೆಷ್ಟು ?

6 ದುಂಡುಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ 4 ಜನರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು ?

7 ಒಂದು ದುಂಡುಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ 5 ಜನ ಹುಡುಗರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕುಳ್ಳಿರಿಸಬಹುದು ? ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಗೊತ್ತಾದ ಇಬ್ಬರು ಹುಡುಗರು ಒಬ್ಬರ ಅನಂತರ ಮತ್ತೊಬ್ಬರು ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳುವರು ?

8 ಒಂದು ಮದುವೆ ಔತಣಕ್ಕೆ 6 ಜನ ಮುಖ್ಯ ಅತಿಥಿಗಳು ಬಂದಿರುವರು. ಇವರನ್ನು ಮದುಮಕ್ಕಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ದುಂಡುಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಕೆಳಗಿನ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕುಳ್ಳಿರಿಸಬಹುದು ?

ವಧು ಮತ್ತು ವರ ಇವರಿಬ್ಬರೂ (i) ಯಾವಾಗಲೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳತಕ್ಕದ್ದು (ii) ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬಾರದು.

1·9 ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೆ r ರಂತೆ n ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಚಯಗಳ (ಕೂಟಭಂಗಗಳ) ಸಂಖ್ಯೆ

ಪ್ರತಿಸಲಕ್ಕೆ r ರಂತೆ n ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ $_nC_r$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಕ್ರಮಚಯಿಸಿದಾಗ, r ವಸ್ತುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಚಯವೂ $r!$ ಕ್ರಮಚಯಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳ $_nC_r$ ಸಂಚಯಗಳು ಒಟ್ಟು $r! \times {}_nC_r$ ಕ್ರಮಚಯಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇದು ಪ್ರತಿಸಲ r ರಂತೆ n ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮ, ಅಂದರೆ $_nP_r$ಗೆ ಸಮ.

ಆದ್ದರಿಂದ $r! \times {}_nC_r = {}_nP_r$

$$\therefore {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಮಾಡಿದ ${}_nP_r$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಿಂದೆ ಸಮರ್ಥಿಸಿದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ, ಅಂದರೆ ಮೂಲತತ್ವಗಳಿಂದ ${}_nC_r$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ರಮವಿದೆ.

1·10 ${}_nC_r$ ನ ಬೆಲೆ : ಮೂಲತತ್ವಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

A, B, C, D, E, . . . ಎಂಬ n ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಪ್ರತಿ ಸಲಕ್ಕೆ r ರಂತೆ n ಅಕ್ಷರಗಳ ಎಲ್ಲ ಸಂಚಯಗಳನ್ನೂ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಿರಿ :

$$\begin{array}{c} A\,B\,C\,D\cdots \\ A\,C\,D\,E\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

ಸಂಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ${}_nC_r$. ಮೇಲಿನ ${}_nC_r$ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $r \times {}_nC_r$.

ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಅಕ್ಷರ ಈ ಸಂಚಯಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಲ ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ; ಹಾಗೆಯೆ ಇದನ್ನು ವಿವಿಧ ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ n ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಅಕ್ಷರ A ಆಗಮಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಹಜವಾಗಿಯೆ ಪ್ರತಿ ಸಲಕ್ಕೆ $(r-1)$ ರಂತೆ ಉಳಿದ $(n-1)$ ಅಕ್ಷರಗಳ, ಸಂಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ಆಗುವುದು. ಇಂಥ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $(r-1)$ ಸಂಚಯಕ್ಕೂ A ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ, A ಉಪಸ್ಥಿತವಿರುವ ಒಂದು r ಸಂಚಯ ಲಭಿಸುವುದು. ಹೀಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಅಕ್ಷರ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ಸಲ ಆಗಮಿಸುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, $r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$

n ಮತ್ತು r ಗಳ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಇದು ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ. n ನ್ನು $(n-1)$ಗೆ ಮತ್ತು r ನ್ನು $(r-1)$ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ ಉತ್ತರೋತ್ತರವಾಗಿ ಈ ಮುಂದೆ ತೋರಿಸಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

$$(r-1) \times {}_{n-1}C_{r-1} = (n-1) \times {}_{n-2}C_{r-2}$$
$$(r-2) \times {}_{n-2}C_{r-2} = (n-2) \times {}_{n-3}C_{r-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2 \times {}_{n-r+2}C_2 = (n-r+2) \times {}_{n-r+1}C_1$$

ಆದರೆ, $\quad {}_{n-r+1}C_1 = n-r+1$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಪದಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ತೊಡೆದುಹಾಕುವುದರಿಂದ,

$$r\,! \times {}_nC_r = n(n-1)\,(n-2) \cdots\cdots (n-r+1)$$

ಅಥವಾ $\quad {}_nC_r = n(n-1)\,(n-2) \cdots\cdots (n-r+1)/r\,!$

ಅನುಮಿತ : ಕ್ರಮಾಗತ r ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $r\,!$ ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ${}_nC_r$ನ್ನು ನಿಗಮನ ಮಾಡುವ ಮುಂದಿನ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಚುರುಕು ಬುದ್ಧಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗ್ರಹಿಸಬಲ್ಲರು.

ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ r-ಸಂಚಯಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಅಂತಹ ಸಂಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ${}_{n-1}C_{r-1}$. ಹೀಗೆ r-ಸಂಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಕ್ಷರವೂ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ಸಲ ಆಗಮಿಸುವುದು; ಆದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $n \times {}_{n-1}C_{r-1}$ ಆಗುವುದು. ಆದರೆ r ಅಕ್ಷರಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಚಯದಲ್ಲಿ ಆಗಮಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಸಂಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ${}_nC_r$; ಆದ್ದರಿಂದ ಅಕ್ಷರಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $r \times {}_nC_r$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\quad r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1}$.

ಚರ್ಚೆಯ ಉಳಿದ ಹಂತಗಳು ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ ಇರುವುವು.

1·11

${}_nC_r = \dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}$ ಆದ್ದರಿಂದ, rಗೆ $(n-r)$ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$${}_nC_{n-r} = \frac{n\,!}{(n-r)\,!\,(n-\overline{n-r})} = \frac{n\,!}{(n-r)\,!\,r\,!}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.

ಈ ಫಲವನ್ನು ಮುಂದೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಮೂಲ ತತ್ತ್ವಗಳಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿಯೂ ನಿಗಮನ ಮಾಡಬಹುದು.

n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವಾಗ, ನಾವು $(n-r)$ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹಿಂದೆ ಬಿಡುತ್ತೇವೆ, ಅಥವಾ ಒತ್ತಟ್ಟಿಗಿರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿ ಒತ್ತಟ್ಟಿಗಿರಿಸಲ್ಪಡುವ $(n-r)$ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟೋ ಅಷ್ಟೆ $(n-r)$ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳು ಇರುವುವು; ಅಂದರೆ $_nC_r = {_nC_{n-r}}$

r ಗಿಂತ $(n-r)$ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ $_nC_r$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಸೂತ್ರ ಬಹಳ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$_8C_6 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 28\cdot$$

ಆದರೆ ಮೇಲಿನ ಫಲವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ

$$_8C_6 = {_8C_2} = \frac{8\cdot7}{1\cdot2} = 28$$ ಎಂದು ತಕ್ಷಣ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ ಹೇಳಬಹುದು.

$_nC_r$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಗಳು ಲಭಿಸುವುವು.

1·12

$$_{n-1}C_r + {_{n-1}C_{r-1}} = \frac{(n-1)\,!}{r\,!\,(n-r-1)\,!} + \frac{(n-1)\,!}{(r-1)\,!\,(n-r)\,!}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,!}{r\,!\,(n-r)\,!} = \frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!} = {_nC_r}$$

$$\therefore\ {_{n-1}C_r} + {_{n-1}C_{r-1}} = {_nC_r}$$

ಇದು ಮತ್ತೊಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲ.

ಈ ಫಲದ ಉಪಪತ್ತಿಯನ್ನು ಸಹ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಮೂಲತತ್ತ್ವಗಳಿಂದ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲ r-ಸಂಚಯುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $_nC_r$. ಒಂದು ಗೊತ್ತಾದ ವಸ್ತುವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ r-ಸಂಚಯುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $_{n-1}C_{r-1}$ ಆಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಉಳಿದ $(n-1)$ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ $(r-1)$ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನಾವು ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಗೊತ್ತಾದ ವಸ್ತುವನ್ನು ಹೊರತಾದ r-ಸಂಚಯುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $_{n-1}C_r$, ಏಕೆಂದರೆ ಆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ $(n-1)$ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನಾವು ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $_nC_r = {_{n-1}C_{r-1}} + {_{n-1}C_r}$

ಉದಾಹರಣೆ 1 : equation ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದಾದ 4 ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಟ್ಟನಲ್ಲಿ 8 ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ, ಮತ್ತು 4 ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$= {}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2 : n ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಕೋನದ ಕರ್ಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

n ಬಾಹುಗಳ ಬಹುಕೋನಕ್ಕೆ n ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳಿರುವುವು. ಅವುಗಳನ್ನು ಜೊತೆ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ${}_nC_2$, ಅಂದರೆ $\frac{n(n-1)}{2}$; ಇವುಗಳಲ್ಲಿ n ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಬಾಹುಗಳಾಗಿವೆ, ಮತ್ತು ಉಳಿದವು ಕರ್ಣಗಳಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕರ್ಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{2}n(n-1)-n = \frac{1}{2}n(n-3)$.

ಉದಾಹರಣೆ 3 ; 8 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮತ್ತು 3 ಜನ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರುಗಳಿಂದ 5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 2 ಉಪಾಧ್ಯಾಯರುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ಸಮಿತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು ?

8 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ 5 ಜನರನ್ನು ${}_8C_5$ ಅಥವಾ 56 ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

3 ಜನ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರುಗಳಿಂದ ಇಬ್ಬರನ್ನು ${}_3C_2$ ಅಥವಾ 3 ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಉಪಾಧ್ಯಾಯರುಗಳ ಆಯ್ಕೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ್ದರಿಂದ, ಸಮಿತಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $56 \times 3 = 168$.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : esteem ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಆರಿಸಬಹುದಾದ 4 ಅಕ್ಷರಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಪದದಲ್ಲಿ 3 eಗಳೂ ಮತ್ತು ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಕ್ಷರಗಳೂ ಇವೆ. 4 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಈ ಮುಂದೆ ಹೇಳಿರುವ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

(i) 3 eಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಉಳಿದ 3 ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಆರಿಸುವುದು.

(ii) 2 eಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಉಳಿದ 3 ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡನ್ನು ಆರಿಸುವುದು.

(iii) 1 eಯನ್ನು ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ 3 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನೂ ಆರಿಸುವುದು.

(i)ರ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು $_3C_1$ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು, ಯಾಕೆಂದರೆ 3 ಭಿನ್ನ ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು 3 eಗಳನ್ನು ಜತೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು. ಮತ್ತು ಈ 4 ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{4!}{3!}$ ಅಥವಾ 4 ಆಗುವುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೀತಿಯ ಆಯ್ಕೆಯಿಂದಲೂ 4 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ರಮಚಯಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಟ್ಟು $_3C_1 \times 4 = 12$ ಕ್ರಮಚಯಗಳಾಗುವುವು.

(ii)ನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $_3C_2$, ಯಾಕೆಂದರೆ m, s, t ಎನ್ನುವ 3 ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ 2 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು. ಇದರ ಜೊತೆಗೆ ಎರಡು eಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಚಯದಲ್ಲೂ 4 ಅಕ್ಷರಗಳು ಇದ್ದು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 2 ಒಂದೇ ಜಾತಿಯವು (eಗಳು). ಆದುದರಿಂದ ಈ 4 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು $\frac{4!}{2!}$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಚಯಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $= {_3C_2} \times \frac{4!}{2!} = 36$.

(iii)ನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಈ ಸಂಚಯದ 4 ಅಕ್ಷರಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಇದು 4! ಅಥವಾ 24 ಕ್ರಮಚಯಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 4 ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $= 12+36+24 = 72$.

1·13 $_nC_r$ನ ಬೆಲೆಯ ಬದಲಾವಣೆ

n ಮತ್ತು r ಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $_nC_r$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. nಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲು

$$_3C_0 = 1,\ _3C_1 = 3,\ _3C_2 = 3,\ _3C_3 = 1;$$

$$_4C_0 = 1,\ _4C_1 = 4,\ _4C_2 = 6,\ _4C_3 = 4,\ _4C_4 = 1;$$

$$_5C_0 = 1,\ _5C_1 = 5,\ _5C_2 = 10,\ _5C_3 = 10,\ _5C_4 = 5,\ _5C_5 = 1.$$

$$_6C_0 = 1,\ _6C_1 = 6,\ _6C_2 = 15,\ _6C_3 = 20,\ _6C_4 = 15,\ _6C_5 = 6,\ _6C_6 = 1.$$

n ಮತ್ತು rಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $_nC_r$ನ ಬೆಲೆಯ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಬಹುದು.

	r=0	1	2	3	4	5	6
n=1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

n–ನ ಯಾವ ದತ್ತ ಬೆಲೆಗಾದರೂ, r ಒಂದು ಮಿತಿಯವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋದಂತೆ, ${}_nC_r$ ನ ಬೆಲೆಯೂ ಏರುತ್ತ ಹೋಗುವುದು, ಅನಂತರ r ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋದಾಗಲೆಲ್ಲಾ ${}_nC_r$ನ ಬೆಲೆಯು ಇಳಿಯುತ್ತ ಹೋಗುವುದು. n ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ${}_nC_r$ನ ಬೆಲೆ ಮಹತ್ತಮವಾಗಿರುವುದು ; n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ${}_nC_r$ ಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಹತ್ತಮ ಬೆಲೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾದ ಎರಡು ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಇತರ ಬೆಲೆಗಳಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿವೆ.

1·14

p ವಸ್ತುಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುವ, q ವಸ್ತುಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುವ, r ವಸ್ತುಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುವ ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಒಟ್ಟು n ವಸ್ತುಗಳ ಸಾಧ್ಯವಾದ ಸಂಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

p ಸಜಾತೀಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು $(p+1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ವಿಲೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಯಾಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 0, 1, 2· · · ಅಥವಾ p ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬಹುದು. ಈ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ q ಸಜಾತೀಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು $(q+1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ವಿಲೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ p ಸಜಾತೀಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು q ಸಜಾತೀಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು $(p+1)$ $(q+1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ವಿಲೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ p ಸಜಾತೀಯ, q ಸಜಾತೀಯ ವಸ್ತುಗಳ, r ಸಜಾತೀಯ

ವಸ್ತುಗಳ . . . . ವಿಲೆ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ

$$(p+1)\ (q+1)(r+1)\cdots$$

ಯಾವುದನ್ನೂ ಆರಿಸದೆ ಎಲ್ಲ ವಸ್ತುಗಳನ್ನೂ ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡುವ ಪಕ್ಷವೂ ಇದರಲ್ಲಿ ಸೇರಿದೆ. ಇದನ್ನು ಆಯ್ಕೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದೆ ಬಿಟ್ಟರೆ, n ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ

$(p+1)(q+1)\ (r+1)\cdots-1$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಆರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ರಿಂದ n ವರೆಗ್ಯೆಯಾವುದಾದರೂ ಆಗಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅನುಮಿತ : ಎಲ್ಲ ವಸ್ತುಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾದರೆ ಆಯ್ಕೆಯ ವಿಧಾನಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $(2\cdot2\cdot2\cdot\cdots\cdot2)-1=2^n-1$ ಆಗುವುದು. ಇದನ್ನೇ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3\cdots+{}_nC_n=2^n-1$.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ANNAMALAI ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಎಲ್ಲ ಸಂಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ANNAMALAI ಪದ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

A–4 ; M–1
I–1 ; N–2
L–1

∴ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಸಂಚಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ

$$=(4+1)\ (1+1)\ (1+1)\ (1+1)\ (2+1)-1$$

$$=5\times2\times2\times2\times3-1=120-1=119.$$

ಉದಾಹರಣೆ 2 : DADDY DID A DEADLY DEED ಎಂಬ ವಾಕ್ಯದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಆಯ್ಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳು :

A–3 I–1
D–9 L–1
E–3 Y–2

ಆದ್ದರಿಂದ ಆರಿಸಬಹುದಾದ ವಿಧಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$=4\times10\times4\times2\times2\times3-1=1919.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$_8C_3$, $_7C_2$, $_8C_8$, $_9C_7$, $_{13}C_8$, $_{16}C_2$

2. ಹನ್ನೊಂದು ಜನರ ಒಂದು ತಂಡದಿಂದ ಇಬ್ಬರು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟಗಾರರನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳೆಷ್ಟು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. n ಬಾಹುಗಳ ಬಹುಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಮಾಡಬಹುದಾದ ನಾಲ್ಕು ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಚಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(a) TRIANGLE (b) MAGNITUDE (c) ಯದುಗಿರಿಕುಮಾರ (d) ರಾಜಶೇಖರ ವಿಲಾಸ.

5. 10 ಜನ ಆಟಗಾರರಿರುವ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಿಂದ, ಗೊತ್ತಾದ ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರನು ಯಾವಾಗಲೂ ಇರುವಂತೆ 6 ಜನ ಆಟಗಾರರ ತಂಡವನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳೆಷ್ಟು ?

6. 4 ಜನ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಮತ್ತು 5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ, 2 ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಮತ್ತು 2 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮಿತಿಯನ್ನು ನೇಮಕಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳೆಷ್ಟು ?

7. 8 ಗಂಡಸರು ಮತ್ತು 4 ಹೆಂಗಸರುಗಳಿಂದ 5 ಜನರ ಒಂದು ಸಮಿತಿಯನ್ನು ನೇಮಕ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇಬ್ಬರು ಹೆಂಗಸರು ಆ ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ನೇಮಕಮಾಡಬಹುದು ?

8. 5 ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮತ್ತು 8 ಕನ್ನಡ ಪುಸ್ತಕಗಳಿಂದ (i) ಒಂದೇ ಒಂದು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಪುಸ್ತಕ (ii) ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ ಒಂದಾದರೂ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಪುಸ್ತಕ ಇರುವಂತೆ 4 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

9. 8 ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಮತ್ತು 5 ಸ್ವರಾಕ್ಷರಗಳಿಂದ, ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ 3 ಸ್ವರಾಕ್ಷರಗಳಾದರೂ ಇರುವಂತೆ 7 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳೆಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. 8 ಜನ ಮುಸ್ಲಿಮರು ಮತ್ತು 6 ಜನ ಹಿಂದುಗಳಿಂದ 8 ಮಂತ್ರಿಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಮಂತ್ರಿಮಂಡಲವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಹಿಂದುಗಳು ಅಲ್ಪಸಂಖ್ಯಾತರಾಗದಂತೆ, ಮಂತ್ರಿಮಂಡಲವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು ?

11. ಒಂದು ದೋಣಿಯ 10 ಮಂದಿ ಅಂಬಿಗರಲ್ಲಿ 3 ಮಂದಿ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲೂ ಇಬ್ಬರು ಮತ್ತೊಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲೂ ಹುಟ್ಟುಹಾಕಬಲ್ಲರು. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಅಂಬಿಗರನ್ನು ಅಣಿಮಾಡಬಹುದು ?

12. 4 ಬಿಳಿ, 4 ಕಪ್ಪು, 8 ಹಳದಿ ಮತ್ತು 8 ಕೆಂಪು ಕಲ್ಲುಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಂಗ್ರಹದಿಂದ 1 ಬಿಳಿ, 2 ಕಪ್ಪು, 3 ಹಳದಿ ಮತ್ತು 4 ಕೆಂಪು ಕಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳು ಎಷ್ಟು ?

13. 15 ಜನ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟಗಾರರಲ್ಲಿ ಹನ್ನೊಂದು ಜನರ ತಂಡವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅವರಲ್ಲಿ 5 ಜನ ಚೆಂಡೆಸೆಯುವವರು (ಬೌಲರರು) ಮತ್ತು ಇಬ್ಬರು ಗುರಿಕೋಲು ಕಾಯುವವರಾಗಿದ್ದಾರೆ (ವಿಕೆಟ್ ಕೀಪರ್). ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ತಂಡವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು ?

(i) ತಂಡದಲ್ಲಿ 4 ಜನ ಚೆಂಡೆಸೆಯುವವರು ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಗುರಿಕೋಲು ಕಾಯುವವನಿರಬೇಕು.

(ii) ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ 4 ಜನ ಚೆಂಡೆಸೆಯುವವರು ಮತ್ತು ಒಬ್ಬನಾದರೂ ಗುರಿಕೋಲು ಕಾಯುವವನಿರಬೇಕು.

14. 7 ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರ ಮತ್ತು 3 ಸ್ವರಾಕ್ಷರಗಳಿಂದ, 4 ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರ ಮತ್ತು 2 ಸ್ವರಾಕ್ಷರಗಳಿಂದಾದ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ?

15. FORMULA ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲೂ ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ಸ್ವರಾಕ್ಷರ ಇರುವಂತೆ 3 ಅಕ್ಷರಗಳ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ?

1·15 ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ (Binomial Theorem)

ನೇರವಾಗಿ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಗಳು ಲಭಿಸುವುವು:

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2 +(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_2)x+a_1a_2a_3$$

ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ,

$$\begin{aligned}(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots(x+a_n) &= x^n+(a_1+a_2+a_3\cdots+a_n)x^{n-1}\\ &+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots)x^{n-2}\\ &+(a_1a_2a_3+a_1a_3a_4+\cdots)x^{n-3}\\ &\cdots+a_1a_2\cdots a_n \qquad \cdots(1)\end{aligned}$$

ಈ ಫಲಿತಗಳಲ್ಲಿ

$a_1+a_2+a_3+\cdots a_n =$ ಎಲ್ಲ a ಗಳ ಮೊತ್ತ $= S_1$

$a_1a_2+a_3a_3+\cdots =$ ಸಲಕ್ಕೆ ಎರಡು a ಗಳಂತೆ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ $= S_2$

$a_1a_2a_3+a_1a_3a_4+\cdots =$ ಸಲಕ್ಕೆ 3ರಂತೆ a ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ$=S_3$

. . . .

$a_1a_2a_3 \cdots a_n = S_n$ ಎಂದು ಹಾಕಿ.

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತವನ್ನು ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots(x+a_n)$$
$$=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}\cdots S_{n-1}\,x+S_n \qquad \cdots(2)$$

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸತಕ್ಕದ್ದು ಎಂದರೆ,

S_1-ನಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= n$

S_2-ನಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= {}_nC_2$

S_3-ನಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= {}_nC_3$; ಇತ್ಯಾದಿ

1·16

ಸಮೀಕರಣ (2)ರಲ್ಲಿ $a_1=a_2=\cdots a_n=a$ ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ, ಆಗ ಸಮೀಕರಣ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ.

$(x+a)(x+a)\cdots n$ ಅಪವರ್ತನಗಳವರೆಗೆ

$= x^n + (a+a+\cdots n$ ಪದಗಳು$)\,x^{n-1}$

$+ (a^2+a^2+\cdots {}_nC_2$ ಪದಗಳು$)\,x^{n-2}$

$+ (a^3+a^3+\cdots {}_nC_3$ ಪದಗಳು$)\,x^{n-3}+\cdots$

$+ (a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots {}_nC_{n-1}$ ಪದಗಳು$)\,x+a\cdot a\cdots$

ಅಂದರೆ,

$$(x+a)^n = x^n+{}_nC_1\,x^{n-1}a+{}_nC_2\,x^{n-2}a^2$$
$$+{}_nC_3\,x^{n-3}a^3+\cdots+a^n \qquad \cdots(3)$$

$(x+a)$ ದ್ವಿಪದ n ಘಾತದ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡುವ ಈ ಫಲಿತವನ್ನು ವ್ಯಾಪಕ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುವರು.

1·17 ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆ

ಗಣಿತಾನುಗಮನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಸಮೀಕರಣ (3)ನ್ನು ಸತ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ $(x+a)$ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ.

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + ({}_nC_1+1)\, x^n a + ({}_nC_2+{}_nC_1)\, x^{n-1}a^2$$
$$+ \cdots + ({}_nC_r + {}_nC_{r-1})\, x^{n-r}\, a^r + \cdots + a^{n+1}$$

ಅಂದರೆ,

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + {}_{n+1}C_1 x^n a + {}_{n+1}C_2\, x^{n-1}a^2 + \cdots$$
$$+ \cdots + {}_{n+1}C_r\, x^{n-r+1}a^r + \cdots + a^{n+1} \quad \cdots (4)$$

ಏಕೆಂದರೆ

$${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$$

(3)ರ ಬಲಬದಿ nನ ಯಾವ ಫಲನವಾಗಿರುವುದೊ (4)ರ ಬಲಬದಿ $(n+1)$ನ ಅದೇ ಫಲನವಾಗಿರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, nನ ಬೆಲೆಗೆ ಪ್ರಮೇಯ ಸತ್ಯವಾದರೆ, ಅದು $(n+1)$ನ ಬೆಲೆಗೂ ಸತ್ಯ. ಆದರೆ $n=2$ ಆದಾಗ ಪ್ರಮೇಯ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $n=3$ ಆದಾಗ ಪ್ರಮೇಯ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ $n=4$ ಆದಾಗಲೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಹೀಗೆ ಗಣಿತಾನುಗಮನ ಕ್ರಮದಿಂದ nನ ಎಲ್ಲ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಪ್ರಮೇಯ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

1·18

3ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x=1$ ಎಂದು ಹಾಕಲಾಗಿ

$$(1+a)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 a + {}_nC_2 a^2 + \cdots {}_nC_n a^n$$

ಎಂಬ ಫಲಿತ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದು aನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸೂತ್ರವಾಗಿದೆ. ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ aಗೆ ಬದಲು ಯಾವ ಅಕ್ಷರವನ್ನಾದರೂ ಆದೇಶಿಸಬಹುದು. aಗೆ ಬದಲು xನ್ನು ಆದೇಶಿಸಲು ಸಮೀಕರಣ ಈ ರೀತಿ ಮಾರ್ಪಾಡಾಗುವುದು.

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1\, x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n \quad \cdots (5)$$

ವ್ಯಾಪಕ ಸಮೀಕರಣ (3)ರಲ್ಲಿ $a=1$, ಎಂದು ಹಾಕಿದರೆ

$$(x+1)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1} + \cdots + {}_nC_{n-1}\, x + {}_nC_n \quad \cdots (6)$$

(5)ನೇ ಮತ್ತು (6)ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ, xನ ಸಮಾನ ಘಾತಗಳನ್ನು ಸರೀಕರಿಸಲು

$${}_nC_0 = {}_nC_n, \quad {}_nC_1 = {}_nC_{n-1}, \ldots$$

ಎಂಬ ಸಾಮ್ಯಗಳು ದೊರೆಯುವುವು.

ಸಂಚಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಈ ಫಲವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

$(1+x)^n$ ವಿಸ್ತರಣದ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು $C_0, C_1, \ldots C_n$ ಎಂದು ಬರೆಯುವ ರೂಢಿ ಇದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ದ್ವಿಪದ ಗುಣಕಗಳೆನ್ನುವರು. ಇಲ್ಲಿ C_r ಎಂಬುದು ${}_nC_r$ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬಳಸಿ 5ನೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n \quad \cdots (7)$$

ಈ ವಿಸ್ತರಣದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು $(n+1)$ ಪದಗಳಿರುವುದೆಂದೂ, C_r ಎಂಬುದು x^rನ ಸಹಗುಣಕವೆಂದೂ C_rx^r ಎಂಬುದು ವಿಸ್ತರಣದ $(r+1)$ನೆಯ ಪದವೆಂದೂ ತಿಳಿಯಬರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : $\left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right)^9$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x ಇಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿರುವ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಸ್ತರಣದ $(r+1)$ನೆಯ ಪದ

$$= {}_9C_r(x^2)^{9-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r = {}_9C_r\, x^{18-2r}\, 3^r x^{-r}$$

$$= {}_9C_r\, x^{18-3r}\, 3^r$$

ಇದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಪದವಾದರೆ, $18-3r=0$, ಅಥವಾ $r=6$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಥಿರಪದ $= {}_9C_6 3^6 = {}_9C_3 3^6 = 84 \times 3^6$.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : $(3-4x)^{13}$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದ ಎರಡು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯಾಬೆಲೆ ಸಮವಾದರೆ, xನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಿಸ್ತರಣದಲ್ಲಿ 14 ಪದಗಳಿರುವುವು; ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 7ನೆಯ ಮತ್ತು 8ನೆಯ ಪದಗಳು ಮಧ್ಯಪದಗಳಾಗಿವೆ.

7ನೆಯ ಪದ ${}_{13}C_6\, 3^7(4x)^6$

ಮತ್ತು 8ನೆಯ ಪದ ${}_{13}C_7\, 3^6\,(4x)^7$

ಈ ಎರಡರ ಸಂಖ್ಯಾ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ $3 = 4x$ ಅಥವಾ $x = \frac{3}{4}$.

[${}_{13}C_6 = {}_{13}C_7$ ಎಂಬುದು ನೆನಪಿರಲಿ]. ಆದ್ದರಿಂದ, xನ ಅಭೀಷ್ಟ ಬೆಲೆ $\frac{3}{4}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ದ್ವಿಪದಿಗಳ ಘಾತ ವಿಸ್ತರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ :
$(1+x)^6$, $(1-x)^5$, $(2x+1)^5$, $(\frac{1}{3}x-1)^7$
2. $(1+x)^8$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯ 6ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{16}$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x^{10}ನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಪದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x ನ ಸಹಗುಣಕವೇನು ?

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^9$$

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಘಟನೆಗಳ ಗಣಿತ (Algebra of Events)

2·1 ಸರಳ ಘಟನೆ ಮತ್ತು ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆ

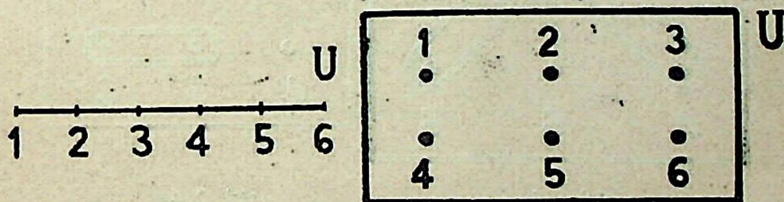
ಒಂದು ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳವನ್ನು ಅಂದರೆ 6 ಮುಖಗಳುಳ್ಳ ನೆತ್ತವನ್ನು ಎಸೆವ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಡೆಸಿದರೆ, 6 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಾಧ್ಯ. ಇಂಥ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಘಟನೆಗಳು (events) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ದಾಳದ ಮುಖಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎಂಬ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಗರ 1, ಗರ 2, ಗರ 3, ಗರ 4, ಗರ 5, ಗರ 6 ಎಂಬ ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾದ 6 ಘಟನೆಗಳು ಸಂಭವಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಈ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ದೊರೆವ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಗರ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆ ಅಥವಾ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಗರ $=$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಕಂಡ 3 ಘಟನೆಗಳು ಅಡಗಿವೆ: ಗರ $= 2$, ಗರ $= 4$ ಮತ್ತು ಗರ $= 6$. ಅಂದರೆ, 'ಗರ $=$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ' ಎಂಬ ಘಟನೆಯನ್ನು

3 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಟನೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಒಡೆಯಬಹುದು. ಹಾಗೆ 2 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಟನೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಬೇರ್ಪಡಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಯನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆ (compound event) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಮೇರೆಗೆ 'ಗರ = ಸಮಸಂಖ್ಯೆ' ಎಂಬುದು ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯಾಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, 'ಗರ = ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ' ಎಂಬ ಘಟನೆಯೂ ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಹಾಗೂ 'ಗರ > 4' ಎಂಬ ಘಟನೆಯೂ ಸಹ ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ; ಏಕೆಂದರೆ ಇದನ್ನು 'ಗರ = 5', 'ಗರ = 6' ಎಂಬ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಟನೆಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಟನೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಒಡೆಯಲಾಗದ ಘಟನೆಗೆ ಸರಳ ಘಟನೆ (simple event) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 'ಗರ = 3' ಎಂಬುದು ಸರಳ ಘಟನೆ; ಹಾಗೆಯೇ 'ಗರ = 1' ಎಂಬುದು ಸರಳ ಘಟನೆ; 'ಗರ > 5' ಎಂಬುದೂ ಸಹ ಸರಳ ಘಟನೆಯಾಗುವುದು. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ದೊರೆಯಬಹುದಾದ ಒಟ್ಟಾರೆ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳ ಸಮಷ್ಟಿಗೆ ಘಟನೆಗಳ ವಿಶ್ವ (universe) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು U ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿನ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾಗಿರುತ್ತವೆ.

2.2 ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶ

ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಡೆಸಿದಾಗ ದೊರೆಯಬಹುದಾದ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು ರೂಢಿ. ಗಣಿತದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಅನುಕೂಲಗಳಿವೆ.

ಷಣ್ಮುಖ ನೆತ್ತವನ್ನು ತೂರಿದಾಗ ದೊರೆವ 6 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳನ್ನು



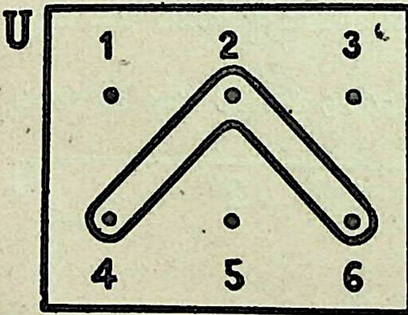
ಚಿತ್ರ 2.1 ಚಿತ್ರ 2.2

1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಈ 6 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳು (sample points) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ

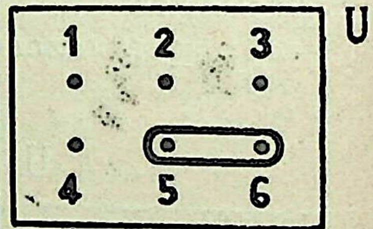
ಒಳಗೊಂಡ ಗಣವನ್ನು ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶ (sample space) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಒಂದು ಸರಳ ಘಟನೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ತೋರಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 2·2). ಷಣ್ಮುಖದಾಳವನ್ನು ತೂರಿದಾಗ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ 6 ಸರಳ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ ಮತ್ತಾವ ಸರಳ ಘಟನೆಯೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ, ಈ ಪ್ರಯೋಗದ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದಲ್ಲಿ 6ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಬಿಂದುಗಳು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುವು. ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಒಂದು ಉಪಗಣ (subset) ಆಗುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರದೇಶ (region) ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 'ಗರ = ಸಮಸಂಖ್ಯೆ' ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆ; 2, 4, 6 ಎಂಬ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಸೇರಿ ಈ ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಒಂದು ವಲಯದಿಂದ ಸುತ್ತುಗಟ್ಟಿ ತೋರಿಸಿದೆ (ಚಿತ್ರ 2·3).

ಇದೇ ರೀತಿ ಗರ >4 ಎಂಬ ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸುತ್ತುಗಟ್ಟಿದ ವಲಯ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಚಿತ್ರ 2·4ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 2.3

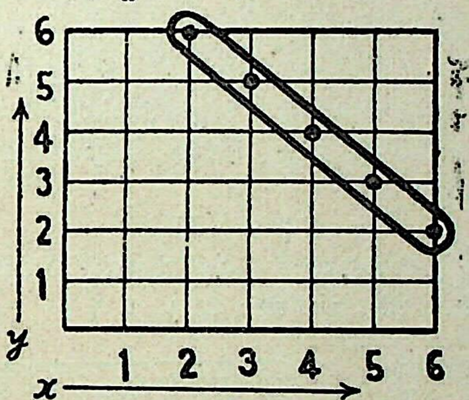


ಚಿತ್ರ 2.4

ಬ್ರಿಟಿಷ್ ತಾರ್ಕಿಕನಾದ ಜಾನ್ ವೆನ್ (John Venn 1834–1883) ಎಂಬಾತನು ಗಣಗಳನ್ನೂ ಉಪಗಣಗಳನ್ನೂ ಈ ವಿಧವಾದ ಪರಿಲೇಖಗಳ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸುವುದನ್ನು ಪ್ರಚುರಪಡಿಸಿದನು. ಆದಕಾರಣ, ಇಂಥ ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ವೆನ್ ಪರಿಲೇಖ(Venn-diagram) ಎಂಬ ಹೆಸರಾಯಿತು.

ಎರಡು ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳಗಳನ್ನು ಎಸೆದರೆ 36 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳು ಒದಗುವುವು. ಮೊದಲನೇ ದಾಳದ ಗರವನ್ನು x ಎಂತಲೂ, ಎರಡನೇ ದಾಳದ ಗರವನ್ನು y ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸುವ. $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ಮತ್ತು $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ಎಂಬ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದಲ್ಲಿ 36 ಬಿಂದುಗಳಿರುವುವು. ಈ 36 ಸರಳ ಘಟನೆಗಳನ್ನೂ ಒಂದು ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ (graph) ತೋರಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚುಕ್ಕೆಯೂ ಒಂದು ಸರಳ ಘಟನೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದು. (ಚಿತ್ರ 2.5). ಈ 36 ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾಗಿಯೂ ಸಂಪೂರ್ಣ ಅಥವಾ ಅಶೇಷವಾಗಿಯೂ (exhaustive) ಇರುವುವು.

ಈಗ ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ದೊರೆವ ಗರಗಳ ಮೊತ್ತ 8 ಇರುವುದು ಎಂಬ ಘಟನೆಯು ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು (2,6) (3,5) (4,4) (5,3) ಮತ್ತು (6,2) ಎಂಬ ಗರಗಳನ್ನು ಪಡೆವ 5 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಘಟಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ(2,6) ಎಂದರೆ, $x = 2$, $y = 6$ ಎಂಬ ಘಟನೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯತಕ್ಕದ್ದು. ಈ ಬಿಂದುಗಳನು ಒಂದು ವಲಯದಿಂದ ಸುತ್ತುಗಟ್ಟಿ ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



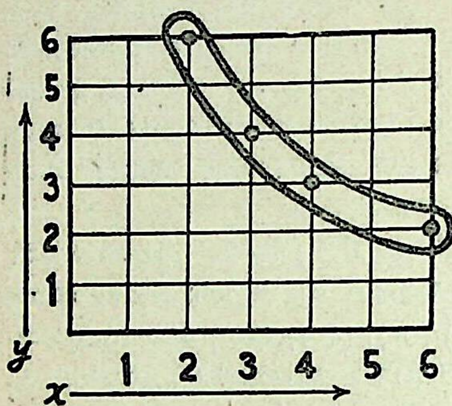
ಚಿತ್ರ 2.5

ಗಣಗಳ ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ ಇವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು :

$$\{\text{ಗರಗಳ ಮೊತ್ತ} = 8\} = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಎರಡು ದಾಳಗಳಲ್ಲಿನ ಗರಗಳ ಗುಣನಫಲ 12 ಇರುವ ಘಟನೆಯು ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು (2,6), (3,4), (4,3), (6,2) ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸರಳ ಘಟನೆ

ಗಳನ್ನಾಗಿ ಒಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ. ಈ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ವಲಯದಿಂದ ಸುತ್ತುಗಟ್ಟಿ ತೋರಿಸಿದೆ (ಚಿತ್ರ 2·6).

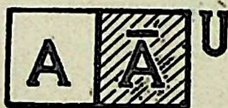


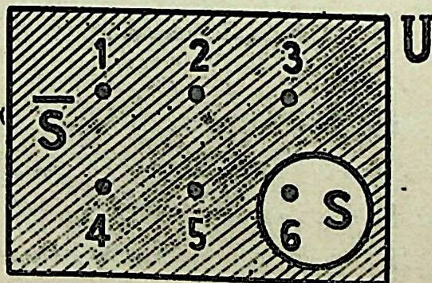
ಚಿತ್ರ 2.6

A ಎಂಬ ಘಟನೆಗೆ ವಿಪರ್ಯಾಸವಾದ ಘಟನೆಗೆ (contrary) $\overline{A}$ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು A ಸಲಾಕಿ ಎಂದು ಓದಬಹುದು. ಇದನ್ನು A' ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸುವರು. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಅದರ ತಲೆ ಮೇಲುಗಡೆ ಇರುವಂತೆ ಬೀಳುವ ಘಟನೆಗೆ A ಎಂಬ ಹೆಸರನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ತಲೆ ಮೇಲುಗಡೆ ಬೀಳದಿರುವ ಘಟನೆಗೆ $\overline{A}$ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಷಟ್ಫಲಕದ ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಗರ 4 ಬೀಳುವ ಘಟನೆಯನ್ನು S ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಗರ 4ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೊಂದು ಗರ ಬೀಳುವ ಘಟನೆಯನ್ನು $\overline{S}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $\overline{S}$ ಎಂಬುದು ಇಲ್ಲಿ ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು 1, 2, 3, 5, 6 ಎಂಬ ಗರಗಳು ಬೀಳುವ 5 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಘಟಿಸಬಹುದು. S ಮತ್ತು $\overline{S}$ ಕೂಡಿ ಸಂಪೂರ್ಣ ಆಕಾಶವಾಗುವುದು (ಚಿತ್ರ 2·7) ಅಂದರೆ

$$S+\overline{S}=U$$

ಇಲ್ಲಿ U ವಿಶ್ವಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ $\overline{S}$ ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು S ಗಣದ (complement) ಪೂರಕ ಎಂದು ಕರೆಯುವುದು ಹೆಚ್ಚು ರೂಢಿ.

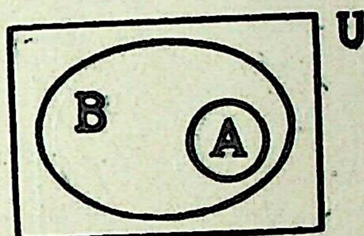




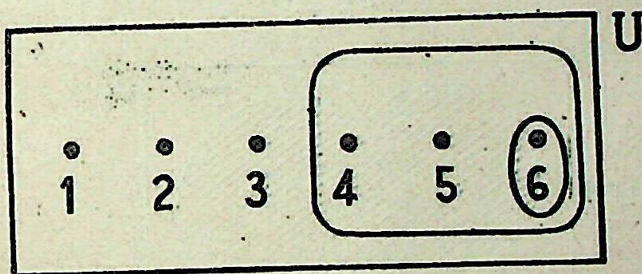
ಚಿತ್ರ 2.7

2·2 ಗಣಗಳ ಸಮತೆ, ಸಂಯೋಗ, ಛೇದನ

A, B ಎಂಬ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರತಿದರ್ಶದ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿದ್ದು, A ಸಂಭವಿಸಿದಾಗೆಲ್ಲಾ B ಸಂಭವಿಸುವುದಾದರೆ A ಯಲ್ಲಿ B ಸೇರ್ಪಡೆಯಾಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $A \subseteq B$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ, ಅಥವಾ $B \supseteq A$. ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವೆನ್ ಪರಿಲೇಖವನ್ನು 2·8ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ A ಎಂಬುದು B ಯ ಉಪಗಣವಾಗುವುದು. "ದಾಳದ ಗರ 6" ಎಂಬ ಘಟನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು "ಗರ 3ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು" ಎಂಬ ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ ಸೇರ್ಪಡೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 2·9ರಲ್ಲಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 2.8



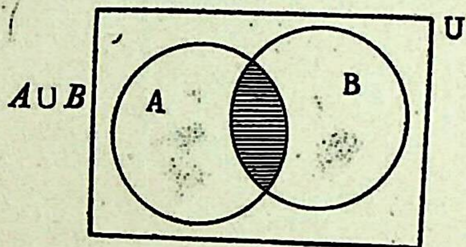
ಚಿತ್ರ 2.9

ಇದೇ ರೀತಿ F ಎಂಬ ಘಟನೆಯು "ನನಗೆ ಮೈಸೂರು ರಾಜ್ಯದ ಲಾಟರಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದನೇ ಬಹುಮಾನ ಸಿಗುವುದು" ಮತ್ತು P ಎಂಬ ಘಟನೆಯು "ನನಗೆ ಮೈಸೂರು ರಾಜ್ಯದ ಲಾಟರಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಹುಮಾನ ಸಿಗುವುದು" ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ F ಘಟನೆ P ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ ಸೇರ್ಪಡೆಯಾಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ

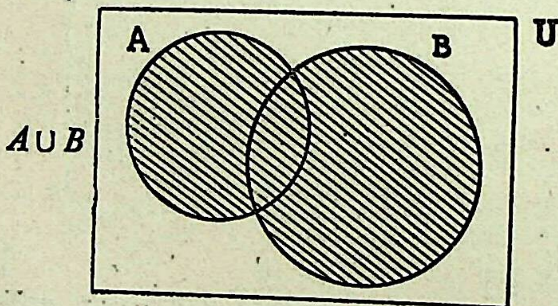
$$F \subseteq P.$$

A ಎಂಬ ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ B ಸೇರ್ಪಡೆಯಾಗಿದ್ದು ಹಾಗೂ B ಎಂಬ ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ A ಸೇರ್ಪಡೆಯಾಗಿದ್ದರೆ A, B ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $A = B$ ಎಂದು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳೆರಡೂ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಸಂಭವಿಸಿದಾಗ ಅದಕ್ಕೆ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಛೇದ (intersection) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $A \cap B$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಈ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳೂ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಬೇಕು. ವೆನ್ ಪರಿಲೇಖದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಉಭಯ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಪ್ರದೇಶ ಅಂದರೆ ಛೇದಕ್ಷೇತ್ರವು ಇದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಚಿತ್ರ 2.10 ರಲ್ಲಿ ಗೆರೆಗಳು ಹಾಕಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಭಾಗವೇ $A \cap B$ ಆಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 2.10



ಚಿತ್ರ 2.11

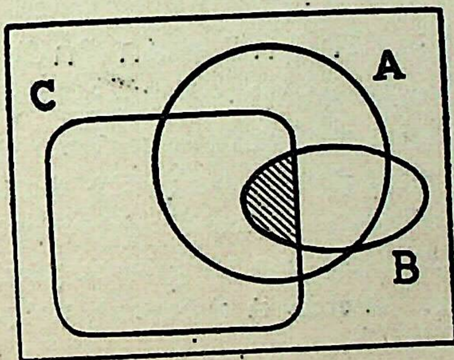
A, B ಘಟನೆಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದಾದರೂ ಘಟಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು A, B ಗಳ ಸಂಯೋಗ (union) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $A \cup B$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. A ಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು B ಕ್ಷೇತ್ರ ಇವೆರಡನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡ ಕ್ಷೇತ್ರವು

$A \cup B$ ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 2·11 ರಲ್ಲಿ $A \cup B$ ಅನ್ನು ಗೀರುಗಳು ಹಾಕಿ ತೋರಿಸಿದೆ).

ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ A, B ಘಟನೆಗಳೆರಡೂ ಸಂಭವಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ ಆ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ವಿಯುತ (disjoint) ಅಥವಾ ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾದವು (mutually exclusive) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ A, B ಗಳ ಛೇದ ಅಲಭ್ಯವಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ ಅಲಭ್ಯವಾಗುವ ಅಥವಾ ಅಸ್ತಿತ್ವ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಘಟನೆಯನ್ನು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ (impossible event) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆಗ $A \cap B$ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಅದು ಶೂನ್ಯಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಗಣಕ್ಕೆ ಶೂನ್ಯಗಣ (null set) ಅಥವಾ ರಿಕ್ತಗಣ (empty set) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು ϵ ಅಥವಾ ϕ ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಮೇರೆಗೆ $A \cap \overline{A} = \phi$ ಆಗುವುದು, ಅಲ್ಲದೆ $A \cup \overline{A} = U$.

$A \cap B = \phi$ ಆದಾಗ A, B ಗಳ ಸಂಯೋಗ ಈ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳ ಒಟ್ಟಾರೆ ಆಗುವುದು. ಆಗ $A \cup B$ ಸಂಯೋಗವನ್ನು $A + B$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುವುದು ರೂಢಿ. ಇದರ ಮೇರೆಗೆ $A + \overline{A} = U$.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನೂ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಟನೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ A, B, C ಇವು ಮೂರಕ್ಕೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು $A \cap B \cap C$, ಅಂದರೆ A, B, C ಗಳ ಛೇದ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (2·12ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗೀರುಗಳು ಎಳೆದಿರುವ ಕ್ಷೇತ್ರ.) ಹೀಗೆಯೇ A_1, A_2, A_3, $\cdots A_n$ ಎಂಬ n ಘಟನೆಗಳಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಛೇದವನ್ನು $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_n$



ಚಿತ್ರ 2,12

ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನೇ $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ ಎಂದೂ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ $A_1, A_2, \ldots A_n$ ಗಳ ಸಂಯೋಗವನ್ನು

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_n$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನೇ $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ಎಂತಲೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

2·3 ಘಟನೆಗಳ ಸಂಯೋಗ ಮತ್ತು ಛೇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಸೂಕ್ತ ವೆನ್ ಪರಿಲೇಖವನ್ನು ಬರೆದು ಇವುಗಳ ಯಥಾರ್ಥತೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 1 : $A \subseteq B$ ಆದಾಗ $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

ಪ್ರಮೇಯ 2 : $A \cap B = B \cap A$ ಮತ್ತು $A \cup B = B \cup A$

ಛೇದ ಪರಿಕರ್ಮದ ಈ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ಪರಿವರ್ತನೀಯತೆ (commutative property) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸಂಯೋಗ ಪರಿಕರ್ಮವು ಸಹ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 3 : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ಅಂದರೆ ಮೊದಲು A, B ಗಳ ಛೇದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ದೊರೆವ ಫಲಿತಕ್ಕೂ C ಗೂ ಛೇದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೂ ಸರಿಯೇ ಅಥವಾ ಮೊದಲು B, C ಗಳ ಛೇದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ದೊರೆವ ಫಲಿತಕ್ಕೂ Aಗೂ ಛೇದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೂ ಸರಿಯೇ ಫಲಿತಾಂಶ ಒಂದೇ ಇರುವುದು. ಈ ಗುಣಕ್ಕೆ ಸಹವರ್ತನೀಯತೆ (associative property) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದರಿಂದಾಗಿ 3ನೇ ಪ್ರಮೇಯದ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ ಆವರಣಗಳ ಆಗತ್ಯವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಕಾರಣ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

ಪ್ರಮೇಯ 4 : $(A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C) = A\cup B\cup C$

ಸಂಯೋಗ ಪರಿಕರ್ಮ $\cup$ ಸಹ ಸಹವರ್ತನೀಯ ಪರಿಕರ್ಮವಾಗಿರುವುದು.

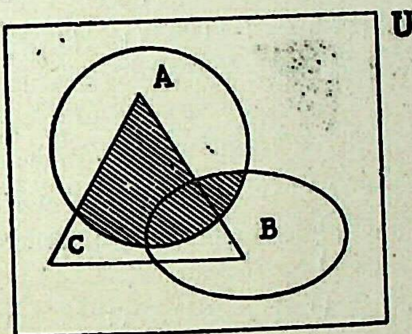
ಪ್ರಮೇಯ 5 : $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

ಅಂದರೆ $\cap$ ಮತ್ತು $\cup$ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ವಿತರಣೀಯ (distributive) ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುವು. ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ

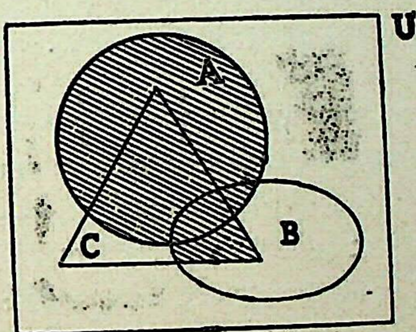
$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

ಎನ್ನುವ ಸಾಮ್ಯವನ್ನು ಇದು ಹೋಲುವುದು.



$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cup C)$

ಚಿತ್ರ 2.13



$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

ಚಿತ್ರ 2.14

ಪ್ರಮೇಯ 6: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

A, Bಗಳ ಛೇದದ ಪೂರಕ $=$ A, B ಗಳ ಪೂರಕಗಳ ಸಂಯೋಗ, ಮತ್ತು A, B ಗಳ ಸಂಯೋಗದ ಪೂರಕ $=$ A, B ಗಳ ಪೂರಕಗಳ ಛೇದ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: 2 ರಿಂದ 6 ರ ವರೆಗಿನ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ ದ್ವೈತತೆ (duality) ಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಯಾವುದೇ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಸಂಯೋಗ ಮತ್ತು ಛೇದ ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಪರಿವರ್ತನೆ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಧುವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಮೇಯ ಸಿದ್ಧಿಸುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 5ನೇ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೊದಲನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ $\cup$ ಎನ್ನುವ ಕಡೆ $\cap$ ಎಂತಲೂ, $\cap$ ಎನ್ನುವ ಕಡೆ $\cup$ ಎಂತಲೂ, ಆದೇಶಿಸಿದರೆ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ಎಂಬ ಪ್ರಮೇಯ ದೊರೆಯುವುದು (5ನೇ ಪ್ರಮೇಯದ 2ನೇ ಭಾಗ).

ಅಭ್ಯಾಸ 2·1

1. $U = \{1, 2, 0, 5, 3, 7, 8, 9\}$, $X = \{1, 2, 5, 7\}$ ಮತ್ತು $Y = \{0, 2, 9\}$ ಆದರೆ, ಈ ಗಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) X' (ii) $X \cup Y$ (iii) $X \cap Y$ (iv) $(X \cup Y)'$

2. $A = \{1, 3, 4, 7\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, $C = \{2, 3, 7, 9\}$ ಆದರೆ,

(i) $A \cup B$ (ii) $B \cup C$ (iii) $(A \cup B) \cap C$ (iv) $A \cap (B \cup C)$ ಈ ಗಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $A = \{a, b, c, d, e,\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{c, d, e, f\}$ ಆದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನಿಜ ಅಥವಾ ಸುಳ್ಳು ಎಂದು ಸಕಾರಣ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ.

(i) $B \subset A$ (ii) $C \subset A$

(iii) $(B \cap C) \subset A$ (iv) $(B \cup C) \subset A$

4. ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಭಾಷೆಯನ್ನನುಸರಿಸಿ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ:

$$(A \cup B) = (A) + (B) - (A \cap B)$$

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗ ಮತ್ತು ಸಂಭವತೆ

3.1 ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗಗಳು (Random Experiments)

ವಿಜ್ಞಾನದ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಅದೇ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಿದ್ಧಿಸುವುವು. ಒಂದು ಕಲ್ಲನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆಸೆದರೆ ಅದು ಸ್ವಲ್ಪ ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಮರಳಿ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬೀಳುವುದು. ಹಿಮಗಡ್ಡೆಯನ್ನು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿಟ್ಟು ಬಿಸಿ ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಕರಗಿ ನೀರಾಗುವುದು. ಈ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಮಾಡಿದರೂ, ಎಷ್ಟು ಸಾರಿ ಮಾಡಿದರೂ ಮರಳಿ ಮರಳಿ ಅದೇ ಫಲಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಹೀಗೆಯೇ 64 ಅಡಿ ಎತ್ತರದ ಗೋಪುರದ ಮೇಲಿಂದ ಒಂದು ಕಲ್ಲನ್ನು ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬೀಳಿಸಿದರೆ, ಅದು 2 ಸೆಕಂಡಿನಲ್ಲಿ ನೆಲವನ್ನು ಸೇರುವುದು. ಸುಣ್ಣದ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಅರಿಸಿನದ ಪುಡಿಯನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ ಅದರ ಬಣ್ಣ ಕೆಂಪಾಗುವುದು. ಒಂದು ವಿದ್ಯುದ್ದೀಪದ ಕಂಬಿಯ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯುತ್ತನ್ನು ಹರಿಯಿಸಿದರೆ ಆ ದೀಪ ಉರಿದು ಬೆಳಕನ್ನು ಬೀರುವುದು. ಇವೆಲ್ಲವೂ ನಿಯತಿಯಂತೆ ಅವಶ್ಯಂಭಾವಿಯಾಗಿ ನಡೆಯುವ ಪರಿಣಾಮಗಳು. ಸಂಶೋಧನೆ ನಡೆಸುತ್ತಿರುವ ಒಬ್ಬ ವಿಜ್ಞಾನಿಯು ಒಂದು ಹೊಸ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿದರೆ, ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಅದೇ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಡೆಸಿ ಆ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಅದೇ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅದೇ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಪರಿಸರದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದಾಗ ಅದೇ ಫಲಿತಾಂಶವು ದೊರೆಯುವುದು. ಅಂಥ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಿಯತಿಯ ಪ್ರಯೋಗ (deterministic experiment) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವಿಜ್ಞಾನದ ಈ ನಿಯತಿ ವಾದದ ಗುಣದಿಂದಲೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಫಲವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.

ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು ಮತ್ತು ಪರಿಸರಗಳು ಒಂದೇ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೂ ಫಲಿತಾಂಶದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳಾಗಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದರೆ, ಅದು ಕೆಳಗೆ ಬಿದ್ದಾಗ ತಲೆ ಮೇಲಾಗಿ ಬೀಳುವುದೊ, ಬಾಲ ಮೇಲಾಗಿ ಬಿಳುವುದೊ ಎಂದು ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಷಣ್ಮುಖ ಅಂದರೆ ಆರು ಬದಿಗಳ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದರೆ, ಯಾವ ಅಂಕ ಮೇಲೆ ಕಾಣುವುದೋ ಅದನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗದು. ಹೀಗೆ ಈ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಮುಂದಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಒಂದೇ ತರಹದ ಎರಡು ಬಿತ್ತಗಳನ್ನು ಭೂಮಿಯಲ್ಲಿ ನೆಟ್ಟರೆ ಮೊಳೆತು

ಬೆಳೆಯುವ ಗಿಡಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಒಂದೇ ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ತಯಾರಾದ ವಸ್ತುಗಳ ಬಾಳಿಕೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುವುದು. ಹೀಗೆ ಒಂದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಒಂದೇ ಬಗೆಯ ಸ್ಥಿತಿಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೆ ಒಳಪಟ್ಟ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶ ಒಂದೇ ಆಗಿರದೆ ಬದಲಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇರುವ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗ (random experiment) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಂಭವಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದ ಮತ್ತು ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಸಾಧನಗಳಾಗಿರುವುವು.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಸವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಆರು ಬದಿಗಳ ನೆತ್ತವನ್ನು (ದಾಳವನ್ನು) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಬದಿಗಳ ಮೇಲೆ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ ಎನ್ನಿ. ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಂಪುಟದೊಳಗೆ ಹಾಕಿ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಕುಲುಕಿ ಎಸೆದಾಗ ದೊರೆವ ಗರವನ್ನು X ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಿ. ಈ ಪ್ರಯೋಗವು ನಿಯತಿಯ ಪ್ರಯೋಗವಲ್ಲ ; ಏಕೆಂದರೆ, X ಎಂಬುದು 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಇರಬಹುದು. ಯಾವ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಾಗಿಯೇ ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಪ್ರಯೋಗದ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ಶತ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೇಲೆ ಕಾಣುವಂತೆ ಸಂಪುಟದಲ್ಲಿ ದಾಳವನ್ನು ಹಾಕಬಹುದು, ಸಂಪುಟವನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ಸಾರಿ ಕುಲುಕಬಹುದು, ಒಂದೇ ವೇಗದಿಂದ ಅದನ್ನು ಬೋರಲಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಏನು ಮಾಡಿದರೂ ಫಲಿತಾಂಶ ನಿಯತವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ, ಅಂದರೆ ಫಲಿತಾಂಶ ಏಕರೀತಿಯಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ, ಚಾಂಚಲ್ಯ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅನಿಯತವಾಗಿಯೇ (unpredictable) ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ X ಚರವನ್ನು ಸಂಭವ ಚರ ಅಥವಾ ಸಂಭವ ಚಲಕ (random variable) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ : ಎರಡು ತಂತಿ ಕಂಬಗಳ ನಡುವಣ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆಯಬೇಕೆನ್ನಿ. ಅಳತೆ ಕೋಲಿಂದ ಅಥವಾ ಮೋಜಣೀದಾರನ ಸರಪಳಿಯಿಂದ ಈ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು ರೂಢಿ. ಇಬ್ಬರು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಒಂದೇ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆದಾಗ್ಗೂ ಅವರ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಹಾಗಲ್ಲದೆ ಒಬ್ಬನೇ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಿದಾಗಲೂ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಬರುವುದು. ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೂ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇದ್ದೇ ಇರುವುದು. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನೋಡಿದರೆ ಈ ಪ್ರಯೋಗವೂ ಸಹ ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗವೇ ಆಗುವುದು.

ಈ ವಿಧವಾಗಿರುವ ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಯ ಮೇಲೆ ವಿಜ್ಞಾನದ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತಾನೇ ಕಟ್ಟಲು ಸಾಧ್ಯ ? ಈ ಒಗಟನ್ನು ಒಡೆಯಲು ಪ್ರಯೋಗಸಿದ್ಧವಾದ (empi-

rical) ಕೆಲವು ತತ್ವಗಳನ್ನು ಆಶ್ರಯಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಒಂಟಿಯಾಗಿ ಅಥವಾ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾರಿ ಇಂಥ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಡೆಸಿದಾಗ ದೊರೆವ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನಿಕರವಾಗಿ ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದರೂ, ಅದೇ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದರೆ ಲಭಿಸುವ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಗಟಿನಲ್ಲಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ವಿಧ ವಾದ ಸ್ತಿಮಿತತೆ ಕಾಣುವುದು. ಇದನ್ನು "ದೀರ್ಘ ಪರಂಪರೆಯ ಸ್ತಿಮಿತತೆ" ಎನ್ನುವರು. ಇದರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ವಾದಸರಣಿಯನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಸಾಧ್ಯ. ಇದು ಸಂಭವಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ತಳಹದಿಯಾಗಿರುವುದು.

3·2 ಸಂಭವತೆಯ ಅನುಭವಸಿದ್ಧ ತಳಹದಿ

ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಕುರಿತು ಹೆಚ್ಚು ತಿಳಿಯಲು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿ ಶೀಲಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳದ ಆರು ಮುಖಗಳ ಮೇಲೆ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ ಎನ್ನಿ. ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಎಸೆದಾಗ ಮೇಲುಗಡೆ ಕಾಣಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು X ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ. X ಚಲಕವು 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ; ಅದು ಯಾವುದೆಂದು ಪೂರ್ವಭಾವಿಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆಯೇ, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ತೂರಿದರೆ ಅದು ತಲೆ ಮೇಲುಗಡೆ ಕಾಣುವಂತೆ ಬೀಳುತ್ತದೆಯೆ ಇಲ್ಲವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶ ಅನಿಶ್ಚಿತವಾದುದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ : ತಲೆನೋವು ಇರುವವರಿಗೆ ಆ ನೋವನ್ನು ನಿವಾರಿ ಸಲು ನಮ್ಮ ವೈದ್ಯರು ಒಂದು ಗುಳಿಗೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಾರೆ. ಅದನ್ನು ನುಂಗಿದರೆ ತಲೆ ನೋವು ನಿಲ್ಲಬಹುದು ಅಥವಾ ನಿಲ್ಲದೆ ಇರಬಹುದು. ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಆ ಗುಳಿಗೆಯನ್ನು ಸೇವಿಸುವ ಜನರ ತಲೆ ನೋವು ವಾಸಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಎಲ್ಲೋ ಒಬ್ಬಿಬ್ಬರಿಗೆ ತಲೆ ನೋವು ವಾಸಿಯಾಗುತ್ತಿಲ್ಲವೆಂದೂ ನಾವು ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಂದರೆ, ವೈದ್ಯರು ನೀಡಿದ ಗುಳಿಗೆಯ ಫಲಿತಾಂಶ ಖಾತರಿಯಾದುದೇನೋ ಅಲ್ಲ ; ಫಲಿತಾಂಶ ಅನಿಶ್ಚಿತವಾದುದೇ ; ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂದೇಹವೂ ಇಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಗುಳಿಗೆಯ ಫಲಿ ತಾಂಶದ ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಗೂ ನಾಣ್ಯ ಚಿಮ್ಮುವುದರ ಫಲಿತಾಂಶದ ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಗೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮನವರಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ಗುಳಿಗೆ 12 ಆಣೆ ಭಾಗ (ಅಂದರೆ, ರೂಪಾಯಿಯಲ್ಲಿ 75 ಪೈಸೆಯಷ್ಟು ಭಾಗ) ಗುಣಪ್ರದವಾಗಿರುವುದೆಂದು ವೈದ್ಯರು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ಅಂದರೆ ಗುಳಿಗೆಯನ್ನು ಸೇವಿಸುವ 100 ಜನರ ಪೈಕಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ 75 ಜನಕ್ಕೆ ಗುಣವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿ

ದಾಗ ದೊರೆವ ಫಲಿತಾಂಶದ ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಗಿಂತ ಗುಳಿಗೆಯ ಸೇವನೆಯ ಫಲಿತಾಂಶದ ಅನಿಶ್ಚಿ ತತೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಎಲ್ಲರೂ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುವರು. ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಯನ್ನು ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಳೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸುಳಿವು ಸಿಕ್ಕಿದಂತಾ ಯಿತು. ಈ ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಗೆ ಸಂಭವತೆ ಎಂದು ಹೆಸರು.

3·3 ಸಂಭವತೆಯ ನಿಯೋಜನೆ (Assignment of Probabilities)

ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದಲ್ಲಿ $e_1, e_2 \cdots e_n$ ಎಂಬ n ಸರಳ ಮತ್ತು ವಿಯುತ ಘಟನೆ ಗಳಿರುವುವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು e_i ಘಟನೆಗೂ $P(e_i)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನೃಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (non-negative number) ಹಚ್ಚಿರಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 1 ಆಗುವಂತಿರಬೇಕು. ಹಾಗೂ e_i ಮತ್ತು e_j ಗಳು ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಿಯುತ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, $e_i \cup e_j$ ಎಂಬ ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಗೆ ಹಚ್ಚುವ ಅನೃಣ ಸಂಖ್ಯೆ $P(e_i) + P(e_j)$ ಇರಬೇಕು. ಆಗ ಅನೃಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವ ಅಳವು (probability measure) ಅಥವಾ ಸಂಭವತೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ,

$$P(e_i) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots n;$$
$$P(e_i \cup e_j) = P(e_i) + P(e_j), \quad (j \neq i);$$
$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1.$$

ಈ ಅನೃಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು "ಭಾರ" ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಕರೆಯುವುದು ಉಂಟು. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ n ಸಂಭವತೆಗಳಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಸಂಭವತೆ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಲಾರದು, ಏಕೆಂದರೆ ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಂಭವತೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ,

$$0 \leqslant P(e_i) \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \cdots n.$$

ಈ ಷರತ್ತುಗಳಿಗೊಳಪಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಹಲವಾರು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಭವ ಅಳವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಹಂಚಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳ ಘಟನೆಗೂ ಒಂದೇ ಸಮನಾದ ಸಂಭವ ಅಳವು ಬರುವಂತೆ $P(e_i)$ ಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆ ಗಳನ್ನು ನೀಡಿದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಭವ (equiprobable) ಹಂಚಿಕೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ತೂರುವಲ್ಲಿ $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಇದು ಸಮಸಂಭವ ಹಂಚಿಕೆಯಾಗುವುದು. ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ 1,2,3,4,5,6

ಎಂಬ ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳವನ್ನು ತೂರಿದಾಗ $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=\frac{1}{6}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಮಸಂಭವ ಹಂಚಿಕೆಯಾಗುವುದು. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನೂ, ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳವನ್ನೂ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕ ಅಥವಾ ಸಾಚಾ ದಾಳ ಎಂದು ಭಾವಿಸುವುದು ರೂಢಿ.

3·4 ಗಣಿತ ಸಂಭವತೆ

ಲೋಕ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಬಳಸುವ ರೀತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿವಿಧ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಒಂದು ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗದ ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾದ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಇರಲಿ. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ m ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಒಂದು ಘಟನೆ ಒದಗುವುದಾದರೆ ಆ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ $=m/n$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡುವುದು ಒಂದು ಸಂಪ್ರದಾಯ. ಇದಕ್ಕೆ ಗಣಿತ ಸಂಭವತೆ (mathematical probability) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸಾಧ್ಯವಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು ಒಟ್ಟು n ಇದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಘಟನೆಗೆ ಅನುಕೂಲ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು m ಇದ್ದರೆ,

ಆ ಘಟನೆಯ ಗಣಿತ ಸಂಭವತೆ

$$=\frac{\text{ಅನುಕೂಲವಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಒಟ್ಟು ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}=\frac{m}{n}.$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ, ಒದಗುವ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಎರಡು : ಬಾಲ ಮತ್ತು ತಲೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶ—ತಲೆ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಬೀಳುವ ಘಟನೆಗೆ ಸಾಧಕವಾದುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ತಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವತೆ $=\frac{1}{2}$. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $P(H)=\frac{1}{2}$. ಇದೇ ರೀತಿ 6 ಬದಿಗಳುಳ್ಳ ದಾಳವನ್ನು ತೂರಿದಾಗ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳು 6 ; ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ ಗರ 1,2, 3,4,5,6 ಬೀಳುವುದು. ಈ 6 ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಪೈಕಿ ಗರ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ ಘಟನೆಗೆ ಸಾಧಕವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಮೂರು ; ಗರ 2, 4, 6. ಆದುದರಿಂದ "ಗರ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ" ಎಂಬ ಘಟನೆಯ ಗಣಿತ ಸಂಭವತೆ $=\frac{3}{6}$. ಇದನ್ನು $P(\text{ಗರ}=\text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ})=\frac{3}{6}$ ಎಂದು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಘಟನೆಯು a ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒದಗುವುದಿದ್ದು, b ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸದೆ ಇದ್ದರೆ, ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶ ಸಾಧ್ಯತೆ $(a+b)$ ಇರುತ್ತದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ಆ ಘಟನೆಯ ಗಣಿತ ಸಂಭವತೆ $=a/(a+b)$ ಆಗುವುದು. ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲಭೂತವಾದ ಒಂದು ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ನಾವು ಚಿಮ್ಮುವ ನಾಣ್ಯವು ಪ್ರಾಮಾಣಿಕವಾದುದು ಎಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ತಲೆ ಮೇಲಾಗಿ ಅಥವಾ

ಬಾಲ ಮೇಲಾಗಿ ಬೀಳುವ ಪ್ರಾಯಿಕತೆ ಸಮಾನವಾದುದು, ಹಾಗೂ ಇವೆರಡೂ ಸಮ ಸಂಭವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಎಂಬ ಈ ತಳಹದಿಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ತೊಡಗುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳವನ್ನು ತೂರಿದಾಗ 6 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗರಗಳು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದು, ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಮಸಂಭವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮುಖ್ಯ ಅಂಶವನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಗಣಿತ ಸಂಭವತೆಯ ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕೆಲವು ಸರಳ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1

ಒಂದು ಇಸ್ಪೀಟು ಕಟ್ಟನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಕಲೆಸಿ ಅನಂತರ ಅದರಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಎಳೆದಿದೆ.

(a) ಅದು ಕಳಾವರಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

(b) ಅದು ರಾಣಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

ಒಡಪು : (a) ಇಸ್ಪೀಟು ಕಟ್ಟನಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 52 ವಿವಿಧ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಾಧ್ಯ. ಒಟ್ಟು 13 ಕಳಾವರು ಎಲೆಗಳಿವೆ ; ಆದುದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಘಟನೆಗೆ ಅನುಕೂಲವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು 13 ಇರುವುವು.

∴ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಭವತೆ

$$= \frac{\text{ಸಾಧಕ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಒಟ್ಟು ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

(b) ಇಸ್ಪೀಟು ಕಟ್ಟನಲ್ಲಿರುವ ರಾಣಿ ಎಲೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 4 ; ಅಂದರೆ, ಎಳೆದ ಎಲೆಯು ರಾಣಿಯಾಗಿರಲು ಸಾಧಕವಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು 4 ಇರುವುವು.

$$\therefore \text{ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಭವತೆ} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

ಉದಾಹರಣೆ 2

ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಒಂದು ತಲೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಲ ಇವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

ಒಡಪು : ತಲೆ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಬೀಳುವುದನ್ನು H ಎಂತಲೂ ಬಾಲ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಬೀಳುವುದನ್ನು T ಎಂತಲೂ ಸಂಕೇತಿಸೋಣ. ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ನಾಲ್ಕು ; ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ,

ಒಂದು ನಾಣ್ಯ : H H T T
ಮತ್ತೊಂದು ನಾಣ್ಯ : H T H T

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಘಟನೆ ಒದಗಲು ಸಾಧಕವಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು 2 ; ಅಂದರೆ, HT, TH.

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಭವತಿ $= 2/4 = 1/2$

ಉದಾಹರಣೆ 3

ಒಂದು ಕುಡಿಕೆಯಲ್ಲಿ 3 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳೂ, 2 ಕರಿ ಗೋಲಿಗಳೂ ಇವೆ. ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ (a) ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಅದು ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವತಿ ಏನು ? (b) ಎರಡು ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದರೆ ಒಂದು ಬಿಳಿ ಗೋಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕರಿ ಗೋಲಿ ಇವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವತಿ ಏನು ?

ಒಡಪು : (a) ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಾದ ಒಟ್ಟು ಫಲಿತಾಂಶಗಳು 5. ಬಿಳಿಯ ಗೋಲಿಯನ್ನು ಪಡೆವ ಘಟನೆಗೆ ಸಾಧಕವಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು 3.

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಭವತಿ $= 3/5$

(b) ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು A, B, C ಎಂಬ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ, ಕರಿಯ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು p, q ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಎರಡು ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಳೆದರೆ ಕೆಳಗಿನ 10 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಾಧ್ಯ.

AB	AC	Ap	Aq	BC	Bp	Bq	Cp	Cq	pq
		×	×		×	×	×	×	

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಳಿ ಗೋಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದು ಕರಿಗೋಲಿ ದೊರೆವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು 6 (ಅವುಗಳ ಕೆಳಗಡೆ × ಎಂದು ಗುರುತು ಹಾಕಿ ತೋರಿಸಿದೆ).

$\therefore$ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಭವತಿ $= 6/10 = 3/5$

ಇದನ್ನು ಮಾರ್ಗಾಂತರದಿಂದ ಹೀಗೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಗೋಲಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ : $3 + 2 = 5$.

ಇವುಗಳಿಂದ 2 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು $_5C_2 = 10$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ, ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 10$.

3 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳಿಂದ 1 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಯನ್ನು $_3C_1 = 3$ ವಿಧಗಳಲ್ಲೂ 2 ಕರಿ ಗೋಲಿಗಳಿಂದ 1 ಕರಿ ಗೋಲಿಯನ್ನು $_2C_1 = 2$ ವಿಧಗಳಲ್ಲೂ ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಇವೆರಡೂ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದವು. ಆದುದರಿಂದ 1 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿ ಮತ್ತು 1 ಕರಿ ಗೋಲಿ ಬರುವಂತೆ $3 \times 2 = 6$ ಬಗೆಯಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು.

$$\therefore \text{ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಭವನತೆ} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

3.5 ಸಂಭವನತೆಯ ತಳಹದಿ

ಗಣಿತ ಸಂಭವನತೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೂ ಸಮಾನ ಪ್ರಾಯಿಕವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಾಗಿರುವುವು ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. ಪರಿಶೀಲನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ನಾಣ್ಯಗಳೂ ದಾಳಗಳೂ ಸಾಚಾ ಅಥವಾ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕವಾದವು ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದೆವು. ಆದರೆ, ಒಂದು ನಾಣ್ಯವು ಪ್ರಾಮಾಣಿಕವಾದ ನಾಣ್ಯವೆಂದರೆ ಏನು ? ಹಾಗೂ ಆ ನಾಣ್ಯ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕವಾದುದೆ ಅಲ್ಲವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ? ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಉತ್ತರ ಸಿಗುವುದು ದುರ್ಲಭ. ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒದಗುವ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವ ಅಥವಾ ದಾಳವನ್ನು ತೂರುವ ಪ್ರಯೋಗದಷ್ಟು ಸರಳವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ನಮ್ಮ ಇಷ್ಟದಂತೆ ಪ್ರಯೋಗ ನಡೆಸಿ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಆಗದಿರಬಹುದು. 30 ವರ್ಷದ ಮನುಷ್ಯನೊಬ್ಬನು ಮುಂದಿನ ಒಂದು ವರ್ಷದವರೆಗೆ ಬದುಕಿರುವ ಸಂಭವನತೆ ಏನು ? ಎರಡು ವರ್ಷಗಳವರೆಗೆ ಬದುಕಿರುವ ಸಂಭವನತೆ ಏನು ಎಂದು ಮುಂತಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಜೀವವಿಮಾ ಕಂಪೆನಿಯವರು ತಿಳಿಯಬೇಕಾದೀತು. ದಾಳಗಳ ಬಗೆ ಹೇಳಿದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ತಿಳಿಯುವಂತಿಲ್ಲ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯಬೇಕಾದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ ಅಥವಾ ಕಾಲಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅವು ಪುನರಾವೃತ್ತಿಗೊಂಡಾಗ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ತಾಳ್ಮೆಯಿಂದ ಕಾದಿದ್ದು ವೀಕ್ಷಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಒಳಪಡಿಸಿ ತರುವಾಯ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಾಗುವುದು.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮುತ್ತೇವೆ ಎನ್ನಿ. ಅದು ತಲೆ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಬಿದ್ದಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು H ಎಂತಲೂ ಎದುರು ಮಗ್ಗುಲು ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಬಿದ್ದಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು T ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸೋಣ. ನಾವು ನಡೆಸಿದ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶ ಹೀಗಿದೆ ಎನ್ನಿ.

$$\underset{3}{HTHHT} \qquad \underset{3}{HHTHT} \qquad \underset{1}{HTTTT}$$

$$\underset{4}{HTHHH} \qquad \underset{2}{HTTHT} \qquad \underset{3}{HHTTH} \cdots$$

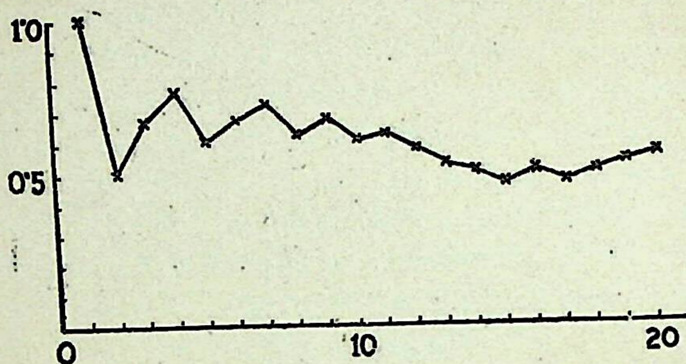
ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮುವುದನ್ನು ಒಂದು ಯತ್ನ (trial) ಎಂದು ಹೇಳುವುದು ವಾಡಿಕೆ. ನಾವು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುವ ಘಟನೆ ಒದಗಿದರೆ ಅದನ್ನು ಜಯವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, n ಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ r ಬಾರಿ ಜಯ ದೊರೆತರೆ, $f = r/n$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು (ratio) ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಘಟನೆಯ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ (relative frequency) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾದಂತೆಲ್ಲ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲೂ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯು ಚಂಚಲತೆ ಅಥವಾ ತೊನೆದಾಟಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗಿರುವುದು. n ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗಣಿಸಿ ಕೋಷ್ಟಕ 3·1ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 3·1

ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯ ತೊನೆದಾಟ : (n=1ರಿಂದ n=20ರ ವರೆಗೆ)

n	r	$f = r/n$	n	r	$f = r/n$
1	1	1.000	11	7	0.627
2	1	0.500	12	7	0.583
3	2	0.667	13	7	0.539
4	3	0.750	14	7	0.500
5	3	0.600	15	7	0.467
6	4	0.667	16	8	0.500
7	5	0.714	17	8	0.471
8	5	0.625	18	9	0.500
9	6	0.667	19	10	0.526
10	6	0.600	20	11	0.550

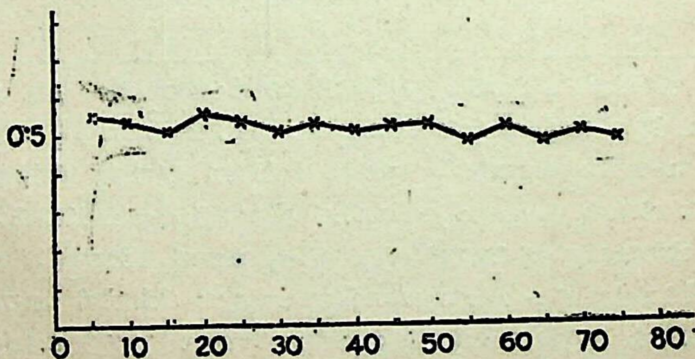
ಈ ಬೆಲೆಗಳ ಆಲೇಖವನ್ನು 3·1ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. n ನ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ತೊನೆದಾಟ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ H ಮತ್ತು T ಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಸರಣಿಯನ್ನು (sequence) 'ಕ್ರಮರಹಿತ ನೆರವಿ' (Irregular Kollektiv) ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಫಾನ್ ಮೀಸಸ್ (Von Mises) ಎಂಬಾತ ಕರೆದಿದ್ದಾನೆ. n ನ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲ $f = r/n$ ಎಂಬ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯ ಬೆಲೆ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು 3·2ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲೂ ಆಲೇಖದ ಮೂಲಕ 3·2ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲೂ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 3.1 : n, f ಇವುಗಳ ಆಲೇಖ ($n=1$ ರಿಂದ $n=20$ರ ವರೆಗೆ)

ಕೋಷ್ಟಕ 3.2
ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯ ಅಭಿಸರಣ

n	r	$f=r/n$	n	r	$f=r/n$
20	11	0.550	50	26	0.520
25	13	0.520	55	27	0.491
30	15	0.500	60	31	0.517
35	18	0.514	65	32	0.492
40	20	0.500	70	35	0.500
45	23	0.511	75	37	0.493



ಚಿತ್ರ 3.2 : n, f ಇವುಗಳ ಆಲೇಖ

ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯ ಈ ತೂನೆದಾಟವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ನೋಡಿದ್ದಲ್ಲಿ nನ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆಲ್ಲ $f = r/n$ ಈ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿನ ಏರಿಳಿತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗಿ ಕೊನೆಗೆ ಸಮತಳವಾಗುತ್ತದೆ. nನ ಬೆಲೆ ಅನಂತಕ್ಕೆ ಉಪಗಮಿಸಿದಾಗ $f = r/n$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಗೆ ಅಭಿಸರಿಸುತ್ತದೆ.* ಈ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸದರಿ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಫಾನ್ ಮೀಸಸ್ಸನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ತೂರಿ ಪ್ರಯೋಗ ನಡೆಸಿದ ಫಲವಾಗಿ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಅಂಕ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳು ದೊರೆತವು. ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದಲೂ ಆಲೇಖದಿಂದಲೂ, n ಅನಂತಕ್ಕೆ ಸರಿದಾಗ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯ ಬೆಲೆ 0.5ಗೆ ಅಭಿಸರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ತಾತ್ವಿಕವಾಗಿ $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{r}{n} \to 0.5$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು (ಅಡಿಟಿಪ್ಪಣಿ ನೋಡಿ.). ಈ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಉಕ್ತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3.6 ಮತ್ತೊಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ತತ್ವವನ್ನೇ ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಬೇರೆ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಂಭವತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಹತ್ತು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ತಲೆ ಮೇಲುಗಡೆ ಕಾಣಿಸುವಂತೆ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಬೀಳುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಜಯ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿ ಬರೆದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗ ಎನ್ನಬಹುದು. ಇದೇ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲೂ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಜಯಗಳಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಅಂದರೆ ಜಯಗಳ ಆವೃತ್ತಿಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿ 3.3ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

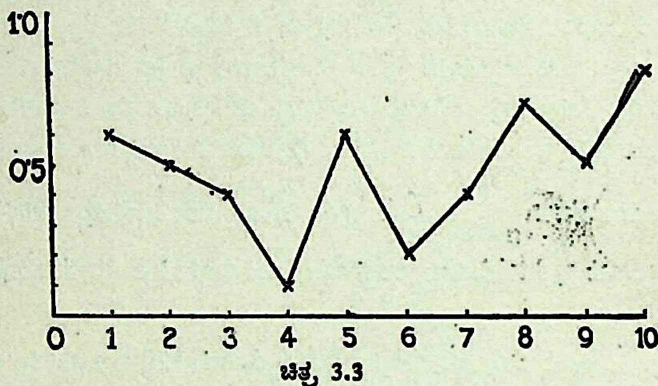
ಕೋಷ್ಟಕ 3.3

10 ಪರೀಕ್ಷಣಗಳ 10 ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಫಲಿತಾಂಶ

ಪ್ರಯೋಗ ಸಂಖ್ಯೆ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ಜಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	6	5	4	1	6	2	4	7	5	8
ಜಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ	0.6	0.5	0.4	0.1	0.6	0.2	0.4	0.7	0.5	0.8

* ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಭಿಸರಣಕ್ಕೂ ಇದಕ್ಕೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. ವಿಷಯ ಜಟಿಲವಾದುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಕುರಿತ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿಲ್ಲ.

ಈ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ $n=10$ ಯತ್ನಗಳಿರುವುವು. ಜಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ ಬೆಲೆ 0·1ರಿಂದ 0·8ರವರೆಗೆ ಹರಡಿದೆ. ಈ ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆಲೇಖದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 3·3).



ಚಿತ್ರ 3.3

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲೂ $n = 100$ ಯತ್ನಗಳು ಇರುವಂತೆ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡು ಅಂಥ ಹಲವಾರು ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಗಳಿಸಿದ ಜಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಜಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳನ್ನೂ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಬಹುದು (ಕೋಷ್ಟಕ 3·4).

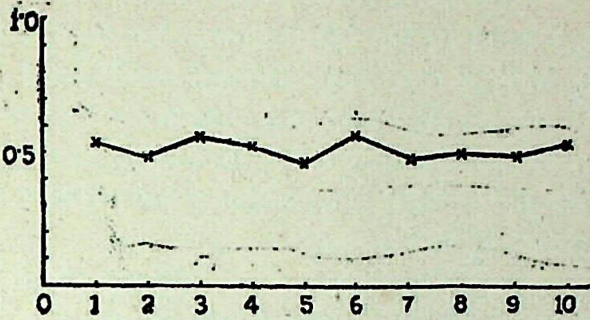
ಕೋಷ್ಟಕ 3·4

ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ 100 ಯತ್ನಗಳುಳ್ಳ 10 ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಫಲಿತಾಂಶ

ಪ್ರಯೋಗ ಸಂಖ್ಯೆ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ಜಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	53	48	56	52	45	55	46	49	47	51
ಜಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ	0.53	0.48	0.56	0.52	0.45	0.55	0.46	0.49	0.47	0.51

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವ ಆಲೇಖವನ್ನು ಚಿತ್ರ 3·4ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಜಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಚಂಚಲತೆ ಕಂಡುಬಂದರೂ ಮೊದಲಿನಷ್ಟು ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಚಂಚಲತೆಯ ಬೀಸು 0·1ರಿಂದ 0·8ರ ವರೆಗೆ ಮೊದಲು ಇದ್ದಿತು. ಈಗ ಅದರ ಬೀಸು 0·45ರಿಂದ 0·56ರ ವರೆಗೆ ಇದೆ. ಈ ಚಂಚಲತೆಯ ಬೀಸನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಮುಂದೆ ನಡೆಸಬಹುದಾದ



ಚಿತ್ರ 3.4

100 ಯತ್ನಗಳ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ತಲೆ ಕಾಣಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುವ ಘಟನೆಯ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಏನಿರಬಹುದು ಎಂದು ಸುಮಾರು ನಿಷ್ಕರ್ಷೆಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯ. 0·45 ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇಲ್ಲದೆ, 0·56 ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿಲ್ಲದೆ ಇರಬಹುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಒಮ್ಮೊಮ್ಮೆ ಅದರ ಬೆಲೆ ಈ ಗಡಿಗಳ ಹೊರಗಡೆ ಬೀಳಬಹುದಾದರೂ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲೂ $n = 1000$ ಯತ್ನಗಳು ಇರುವಂತೆ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡು, ಆಗ ದೊರೆವ ಜಯಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಿ, ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದಾಗ ಇದರ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಾಗುವ ಚಂಚಲತೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಮುಂದೆ ನಡೆಸಬಹುದಾದ 1000 ಯತ್ನಗಳ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಏನಿರಬಹುದೆಂದು ಮತ್ತಷ್ಟು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಆದರೆ ಸುನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿ, ಕಡ್ಡಿ ಮುರಿದಂತೆ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿನ ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆಲ್ಲ ಅನಿಶ್ಚಿತತೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗಿ, ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಥಿರತೆ ಮೂಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಉಕ್ತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ ಎಂದು ವ್ಯವಹರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ತೂರಿದಾಗ ಗರ 5 ಅಥವಾ 6 ಬೀಳುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

2. ಒಂದು ಇಸ್ಪೀಟು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಜಾಕಿಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದರ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಚೀಟಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಕದಂತೆ 1, 2, 3, . . . , 12 ಎಂಬ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ 12 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಚೀಟಿಗಳಿಂದ ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೀಟಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ 3ರ ಗುಣಕ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರೆಯುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

4. ಒಟ್ಟು 19 ರಟ್ಟಿನ ತುಂಡುಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, 2, 3, . . . , 19 ಎಂಬ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ. ಒಂದು ರಟ್ಟಿನ ತುಂಡನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆಯ್ದರೆ, ಅದರ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ಅಥವಾ 7 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವುದರ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ಇಸ್ಪೀಟು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಎಳೆದಿದೆ. ಕೆಳಕಂಡ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿರಿ.

(i) ಆ ಎಲೆ ಇಸ್ಪೀಟು ಆಗಿರಬೇಕು.

(ii) ಆ ಎಲೆ ಒಂದು ಬೊಂಬೆ ಇರುವ ಎಲೆಯಾಗಿರಬೇಕು.

(iii) ಆ ಎಲೆ ಇಸ್ಪೀಟಾಗಲಿ ಅಥವಾ ಬೊಂಬೆ ಇರುವ ಎಲೆಯಾಗಲಿ ಇರಬೇಕು.

6. ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಒಂದು ಬಾರಿ ತೂರಿದಾಗ ಗರಗಳ ಮೊತ್ತ 7 ಆಗುವುದರ ಸಂಭವತೆ ಏನು ? ಮೊತ್ತ 9 ಆಗುವುದರ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

7. ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೆ ಒಂದು ಬಾರಿ ತೂರಿದಾಗ ಗರಗಳ ಮೊತ್ತ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆಯೂ ಗರಗಳ ಮೊತ್ತ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆಯೂ ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ 5/12 ಇರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ತೂರಿದಾಗ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ಸಲವಾದರೂ 6 ದೊರೆಯುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

9. ಆರು ಮುಖಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಸಾಚಾ ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ತೂರಿದಾಗ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ (i) 10 ಇರುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು? (ii) ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ 10 ಇರುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ? (ಮೈಸೂರು ಪಿ.ಯು.ಸಿ.)

10. ಸಗಟಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕುಟುಂಬದ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಗಂಡು ಮಕ್ಕಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 1/2 ಇರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, 6 ಮಕ್ಕಳಿರುವ ಕುಟುಂಬದಲ್ಲಿ (i) ಎಲ್ಲರೂ ಗಂಡು ಮಕ್ಕಳಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ? (ii) ಎಲ್ಲರೂ ಹೆಣ್ಣು ಮಕ್ಕಳಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ? (iii) ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ 4 ಗಂಡು ಮಕ್ಕಳು ಇರುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ? (ಅಣ್ಣಾಮಲೆ ವಿ.ವಿ.)

11. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮುತ್ತೇನೆ. ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ತಲೆ ಮತ್ತು ಬಾಲ ಬೀಳುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

12. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ತಲೆ ಮತ್ತು ಬಾಲ ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಬೀಳುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

13. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನೂ ದಾಳವನ್ನೂ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ತೂರಿದಾಗ (i) ತಲೆ ಮತ್ತು ಗರ 3 ಬೀಳುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ? (ii) ತಲೆ ಮತ್ತು ಗರ 3 ಇಲ್ಲವೆ ಬಾಲ ಮತ್ತು ಗರ 4 ಬೀಳುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

14. ಒಂದು ಇಸ್ಪೀಟು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಎರಡು ಎಲೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದಾಗ ಅವು ಎರಡೂ ರಾಜನ ಎಲೆಯಾಗಿರುವುದರ ಸಂಭವತೆ 1/221 ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 3 ಬಿಳಿಯ ಗೋಲಿಗಳೂ 2 ಕರಿಯ ಗೋಲಿಗಳೂ ಇವೆ. ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪನೆ ಇಲ್ಲದೆ ಎರಡು ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಎರಡೂ ಬಿಳಿಯ ಗೋಲಿಗಳಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

16. 1, 2, . . . , 20 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದರೆ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 10 ಆಗುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

17. 1, 2, 3, 4 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪನೆ ಮಾಡಿ ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

18. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 4 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳೂ 5 ಬಿಳಿಯ ಗೋಲಿಗಳೂ ಇವೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳೂ 3 ಬಿಳಿಯ ಗೋಲಿಗಳೂ ಇವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಚೀಲದಿಂದ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಎರಡನೆಯ ಚೀಲಕ್ಕೆ ಹಾಕುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಎರಡನೆಯ ಚೀಲದಿಂದ ಒಂದು ಗೋಲಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಬಿಳಿಯ ಗೋಲಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

3.7 ಸಂಭವ ಅಳವಿನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

A ಎಂಬ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವ ಅಳವನ್ನು (probability measure) $P(A)$ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಂಭವತೆ ಅಳವಿನ ಮುಖ್ಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಗತಿಯೆಂದರೆ, U ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಹಚ್ಚುವ ಭಾರಗಳು ಅನುಭವಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಮತ್ತು ಸಂದರ್ಭ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಬದಲಾಗಬಹುದು. ಆದರೆ, ಒಮ್ಮೆ ನಿರ್ಧರವಾದ ಮೇಲೆ ಆ ಭಾರಗಳು ಬದಲಾಗದೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೆ ಒಳಪಟ್ಟದ್ದಾಗಿರುತ್ತವೆ.

1. $P(\mathrm{U}) = 1$.

ಅಂದರೆ, ಘಟನೆಯ ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಘಟನೆ ಖಾತರಿಯಾಗಿ ಒದಗುತ್ತದೆ. ಇದು ನಿಶ್ಚಿತ ಘಟನೆ ಅಥವಾ ಖಾತರಿಯಾದ ಘಟನೆ (sure event).

2. A ಎಂಬುದು U ದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಘಟನೆಯಾದರೂ

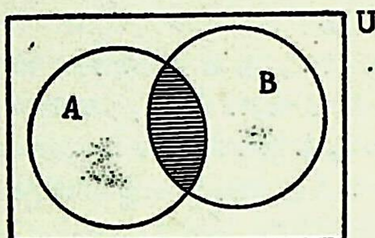
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳೂ ಸಂಭವತೆ ಅಳವಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದಲೇ ಸಿದ್ಧಿಸುವುವು.

3. A, B ಎಂಬುವು U ದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳಾದರೆ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಚಿತ್ರ 3.5 ರ ಸಹಾಯವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 3.5

ಈಗ $A = A \cap B + A \cap B'$, $B = A \cap B + A' \cap B$

ಹಾಗೂ, $A \cup B = A \cap B + A' \cap B + A \cap B'$

ಈ ಸಾಮ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಬಲಬದಿಯ ಘಟನೆಗಳು ವಿಯುತ (disjoint) ಘಟನೆಗಳು. ಆದುದರಿಂದ,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

ಮತ್ತು $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) + P(A \cap B')$

ಇದರಿಂದಾಗಿ, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ಎಂಬ ಫಲವು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಅನುಮಿತ : A, B ಘಟನೆಗಳು ವಿಯುತ ಆಗಿದ್ದರೆ, $A \cap B = \phi$ ಆಗುವುದು. ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ

4. $P(A + B) = P(A) + P(B).$

ಇದನ್ನು ಸಂಭವತೆಯ ಸಂಕಲನ ನಿಯಮ (addition law of probability) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ A, B ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾದವು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. A ಘಟನೆಯ ಪೂರಕ A' ಆದರೆ, A, A' ಇವೆರಡೂ ವಿಯುತ ಘಟನೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಮತ್ತು $A + A' = U$ ಆಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ

5. $P(A) + P(A') = 1$.

ಅನೇಕ ವೇಳೆ $P(A)$ ಗಿಂತ $P(A')$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗಣಿಸುವುದು ಸುಲಭವಾಗಿರುವುದು. ಅಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲು $P(A')$ ಅನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಈ ಸಾಮ್ಯವನ್ನು ಬಳಸಿ $P(A)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲದ ಅಥವಾ ಅಸಂಭವವಾದ ಘಟನೆಯನ್ನು ϕ ಎಂತಲೂ ಸುನಿಶ್ಚಿತವಾದ ಘಟನೆಯನ್ನು U ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸುವೆವು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ϕ, U ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕಗಳು. ಆದುದರಿಂದ

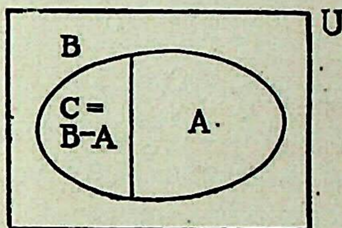
6. $P(\phi)+P(U)=1$, ಅಥವಾ $P(\phi)=1-P(U)=0$.

ಅಂದರೆ, ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುವುದು.

7. $A \subset B$ ಆದಾಗ, $P(A) \leq P(B)$.

A ಯಲ್ಲಿ ಸೇರ್ಪಡೆಯಾಗದ B ಯ ಭಾಗವನ್ನು C ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಇದನ್ನು $B - A$ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ A ಮತ್ತು C ವಿಯುತ ಘಟನೆಗಳಾಗುವುವು (ನೋಡಿ ಚಿತ್ರ 3.6). ಆದ್ದರಿಂದ,

$$B = A + C.$$



ಚಿತ್ರ 3.6

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ 4ನೇ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ,

$$P(A) + P(C) = P(B).$$

ಹಾಗೂ 2ನೇ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ, $0 \leq P(C)$. ಆದುದರಿಂದ

$$P(A) \leq P(A) + P(C), \text{ ಅಂದರೆ, } P(A) \leq P(B).$$

8. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ 3ನೇ ನಿಯಮವನ್ನು ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಟನೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. A, B, C ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಘಟನೆಗಳಾದರೆ,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

9. $A, B, C,$ ಘಟನೆಗಳು ಜೊತೆ ಜೊತೆಯಾಗಿ ವಿಯುತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ $P(A \cap B) = \phi,\ P(B \cap C) = \phi,\ P(A \cap C) = \phi$ ಇದ್ದಾಗ, $(A \cup B \cup C)$ ಅನ್ನು $A + B + C$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

ಎಂಬ ಫಲ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದನ್ನು 4ನೇ ನಿಯಮದ ವಿಸ್ತರಿಸಿದ ರೂಪವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

3.8 ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ (Conditional Probability)

ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಒದಗುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಅನಿಯತವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದೂ, ಆ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಯಥೋಚಿತವಾಗಿ ಸಂಭವ ಅಳವನ್ನು ನೀಡಬಹುದೆಂದೂ ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದೆ. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಿದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿ ದೊರೆತಾಗ, ಈ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳೂ ಬದಲಾಗಬಹುದು. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರೊಬ್ಬರು—ಘಟ್ಟವಾಳ್ತಯ್ಯನವರು—ಬೆಂಗಳೂರಿನಿಂದ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ನಿನ್ನೆ ಸಂಜೆ ವಿಮಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣ ಬೆಳೆಸಿದರು. ವಿಮಾನವು ಮದ್ರಾಸ್ ನಿಲ್ದಾಣದಲ್ಲಿ ನೆಲಕ್ಕಿಳಿಯುವಾಗ ಯಾವುದೋ ಅಪಘಾತಕ್ಕೊಳಗಾಯಿತಂತೆ. ರೇಡಿಯೋ ಪ್ರಸಾರದಿಂದ ಈ ಸುದ್ದಿ ನಮಗೆ ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ. "ಬೆಂಗಳೂರಿನಿಂದ ನಿನ್ನೆ ಸಂಜೆ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ಬಂದ ವಿಮಾನವು ನೆಲಕ್ಕಿಳಿಯುವಾಗ ಅಪಘಾತಕ್ಕೀಡಾದ ಕಾರಣ,ಅದರಲ್ಲಿದ್ದ 50 ಪ್ರಯಾಣಿಕರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರು ಮೃತಪಟ್ಟರು ಮತ್ತು ಕೆಲವರು ಗಾಯಗೊಂಡರು." ಈ ಸುದ್ದಿಯನ್ನು ಕೇಳಿದ ಕೂಡಲೆ ನಮ್ಮ ಎದೆ ಧಸಕ್ಕೆನ್ನುತ್ತದೆ. ಸತ್ತುಹೋದ ಪ್ರಯಾಣಿಕನು ಘಟ್ಟವಾಳ್ತಯ್ಯನಾಗಿರಬಹುದೋ ಎಂಬ ಚಿಂತೆ ಮೂಡುತ್ತದೆ. ಆತನು ಸತ್ತುಹೋಗಿರುವುದರ ಸಂಭವತೆ 1/50 ಇರುವುದೆಂದು ಗುಣಕ ಹಾಕುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಗಂಟೆಯ ತರುವಾಯ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಸಾರದಲ್ಲಿ ರೇಡಿಯೋ ಸುದ್ದಿ ಹೀಗೆ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. "ವಿಮಾನ ಅಪಘಾತದಲ್ಲಿ ಮೃತಪಟ್ಟವರು ಬೆಂಗಳೂರಿನಿಂದ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದ 10 ಪ್ರಯಾಣಿಕರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರೆಂದು ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ." ಈ ವರ್ತಮಾನದಿಂದ ಘಟ್ಟವಾಳ್ತಯ್ಯನವರು ಸತ್ತಿರಬಹುದಾದ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ 1/10 ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲು 1/50 ಇದ್ದು, ಈ ಹೆಚ್ಚಿನ ವರ್ತಮಾನದ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ಸಂಭವತೆಯು 1/10 ಕ್ಕೆ ತಿರುಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಸಂಭವ ಅಳವು ಸಂಬದ್ಧವಾದ ವರ್ತಮಾನವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬದಲಾದ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ ಅಥವಾ ವಿಧೇಯ ಸಂಭವತೆ (conditional

probability) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. "ಸತ್ತ ಪ್ರಯಾಣಿಕರು ಬೆಂಗಳೂರಿನಿಂದ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದ 10 ಜನರಲ್ಲೊಬ್ಬರು" ಎಂಬ ವರ್ತಮಾನ ತಿಳಿದಾಗ ಘಟ್ಟವಾಳ್ತಯ್ಯನು ಸತ್ತಿರಬಹುದೆಂಬುದರ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ 1/10 ಇರುತ್ತದೆ.

ಅನಂತರದ ಪ್ರಸಾರದ ಮೂಲಕ ವಿಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದ 50 ಪ್ರಯಾಣಿಕರಲ್ಲಿ 20 ಮಂದಿ ತಿರುವನಂತಪುರದಿಂದಲೂ, 8 ಮಂದಿ ಕೊಚ್ಚಿಯಿಂದಲೂ, 12 ಮಂದಿ ಕೊಯಮತ್ತೂರಿನಿಂದಲೂ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರು ಎಂಬ ಹೊಸ ವರ್ತಮಾನ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ ಘಟ್ಟವಾಳ್ತಯ್ಯನು ಸತ್ತನೆಂಬುದರ ಸಂಭವತೆ ಯಾವ ವಿಧದಲ್ಲೂ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ತರುವಾಯ ಮತ್ತೊಂದು ಹೊಸ ಸುದ್ದಿ ಪ್ರಸಾರವಾಗುತ್ತದೆ. "ನಿನ್ನೆ ಸಂಜೆ ವಿಮಾನದಲ್ಲಿ ಬೆಂಗಳೂರಿನಿಂದ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದ ಪ್ರಯಾಣಿಕರ ಪೈಕಿ 8 ಜನ ಗಂಡಸರೂ ಇಬ್ಬರು ಹೆಂಗಸರೂ ಇದ್ದರೆಂದೂ, ಅಪಘಾತದಲ್ಲಿ ಮೃತಪಟ್ಟವರು ಗಂಡಸರೆಂದೂ ಗೊತ್ತಾಗಿದೆ". ಈ ವರ್ತಮಾನ ಕೇಳಿದ ಮೇಲೆ, ಸತ್ತವನು ಘಟ್ಟವಾಳ್ತಯ್ಯನು ಎಂಬುದರ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ 1/8 ಕ್ಕೆ ತಿರುಗುತ್ತದೆ. ಕೆಲ ಹೊತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಸುದ್ದಿ ಬರುತ್ತದೆ. "ನಿನ್ನೆ ಅಪಘಾತಕ್ಕೀಡಾದ ವಿಮಾನದಲ್ಲಿ ಬೆಂಗಳೂರಿನ 10 ಪ್ರಯಾಣಿಕರ ಪೈಕಿ ಅಮೆರಿಕ ಪ್ರವಾಸಿಗಳಾದ ಹಿಪ್ಪಿ–ಹಿಪ್ಪಿಣಿಯರ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳಿದ್ದವು. ಸತ್ತವನು ಅವರ ಪೈಕಿ ಒಬ್ಬ ಹಿಪ್ಪಿಯೆಂದು ವರದಿಯಾಗಿದೆ". ಘಟ್ಟವಾಳ್ತಯ್ಯನು ಹಿಪ್ಪಿಯಲ್ಲ; ಆದುದರಿಂದ ಈ ಸುದ್ದಿಯನ್ನು ಕೇಳಿದ ಮೇಲೆ ಆತನು ಸತ್ತಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಖಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಈ ಹೊಸ ವರ್ತಮಾನ ತಿಳಿದಾಗ ಆತನು ಸತ್ತನೆಂಬ ಘಟನೆಯ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆಯು ಸಂಬದ್ಧವಾದ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿ ಅಥವಾ ವರ್ತಮಾನಕ್ಕೆ ಅಧೀನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದೇ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆಯು ಹೆಚ್ಚಿನ ವರ್ತಮಾನ ತಿಳಿದಂತೆಲ್ಲ ಬದಲಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವುದು. "ಘಟ್ಟವಾಳ್ತಯ್ಯನು ಸತ್ತನು" ಎಂಬ ಘಟನೆಯನ್ನು A ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ವಿವಿಧ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳಲ್ಲಿ A ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

1ನೇ ಹಂತ : ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿಷಯಗಳೇನೂ ತಿಳಿಯದಿದ್ದಾಗ: $P(A) = 1/50$

2ನೇ ಹಂತ : ಬೆಂಗಳೂರಿನಿಂದ 10 ಪ್ರಯಾಣಿಕರು ವಿಮಾನದಲ್ಲಿ ಮದ್ರಾಸಿಗೆ ಹೋದರು ಎಂದು ತಿಳಿದಾಗ A ಯ ಸಂಭವತೆ 1/10 ಆಯಿತು. ಇದನ್ನೇ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$P(A \mid \text{ಬೆಂಗಳೂರಿನಿಂದ ಹೊರಟ ಪ್ರಯಾಣಿಕರು 10 ಮಂದಿ ಇದ್ದರು}) = 1/10$$

3ನೇ ಹಂತ: ಈ 10 ಪ್ರಯಾಣಿಕರಲ್ಲಿ 8 ಜನ ಗಂಡಸರು, ಇಬ್ಬರು ಹೆಂಗಸರು ಎಂದು ತಿಳಿದಾಗ, Aಯ ಸಂಭವತೆ 1/8 ಆಯಿತು. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ

$P(A$ | ಬೆಂಗಳೂರಿನ 10 ಪ್ರಯಾಣಿಕರಲ್ಲಿ 8 ಜನ ಗಂಡಸರಿದ್ದರು) $= 1/8$.

4ನೇ ಹಂತ: ಸತ್ತವನು ಅಮೆರಿಕದ ಒಬ್ಬ ಹಿಪ್ಪಿ ಎಂಬ ವರ್ತಮಾನ ತಿಳಿದಾಗ, A ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ,

$P(A$ | ಸತ್ತವನು ಹಿಪ್ಪಿಗಳಲ್ಲೊಬ್ಬ) $= 0$.

3.9 ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆಯ ಸೂತ್ರ

ಈಗ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ವಿಶದವಾಗಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶವಾಗಿರಲಿ. ಹಾಗೂ

$$P(e_i) = p_i, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

ಮತ್ತು $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ ಇರಲಿ.

ಇದು ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸಂಭವತೆಗಳ ಸಮಂಜಸವಾದ ನೀಡಿಕೆಯಾಗುವುದು.

B ಎಂಬುದು ಯಾವುದಾದರೂ ಘಟನೆಯಾಗಿರಲಿ; ಅಂದರೆ, ಅದು $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದಾದರೂ $E_1, E_2, \ldots, E_r$ ಎಂಬ r ಘಟನೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಉಪಗಣವಾಗಿರಲಿ. B ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ

$$P(B) = P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_r) = \sum_{j=1}^{r} P(E_j) \quad \ldots (9.1)$$

ಈಗ $P(B) > 0$ ಇದ್ದು, B ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ ಎನ್ನಿ. ಅಂದರೆ, $E_1, E_2, \ldots, E_r$ ಎಂಬ ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾದ r ಸರಳ ಘಟನೆಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಘಟನೆ ಘಟಿಸಿದೆ. ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ, S ಗಣದ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಹೊಸ ಸಂಭವ ಅಳವುಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಹಚ್ಚುತ್ತೇವೆ.

1. $e \in B$ ಎಂಬ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, $P(e \mid B) = \dfrac{P(e)}{P(B)}$
2. $e \notin B$ ಎಂಬ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, $P(e \mid B) = 0$

$\ldots (9.2)$

ಇದನ್ನೇ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$\left.\begin{array}{l} P(E \mid B) = P(E_j)/P(B),\ j = 1, 2, \ldots, r \\ \text{ಮತ್ತು } B \text{ ಗೆ ಸೇರ್ಪಡೆಯಾಗದ } e_i \text{ ಗಳಿಗೆ, } P(e_i \mid B) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (9{\cdot}3)$$

ಈ ತೆರನಾದ ಸಂಭವತೆಗಳ ನೀಡಿಕೆ ಸಮಂಜಸವಾದುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

(i) $e_i \in S$ ಆದಾಗ, $P(e_i) \geqslant 0$ ಮತ್ತು $P(B) > 0$.
ಆದುದರಿಂದ, $P(e_i \mid B) \geqslant 0$.

(ii) $P(e_1 \mid B) + P(e_2 \mid B) + \cdots + P(e_n \mid B)$

$$= [P(E_1 \mid B) + P(E_2 \mid B) + \cdots + P(E_r \mid B)]$$

← . . Bಗೆ ಸೇರ್ಪಡೆಯಾದ r ಘಟನೆಗಳು . . →

$$+ [0 + 0 + \cdots + 0]$$

← Bಗೆ ಸೇರ್ಪಡೆಯಾಗದ $(n - r)$ ಘಟನೆಗಳು →

$$= \frac{P(E_1)}{P(B)} + \frac{P(E_2)}{P(B)} + \cdots + \frac{P(E_r)}{P(B)}$$

$$= \frac{1}{P(B)}\Big[P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_r)\Big]$$

$$= \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

ಆದುದರಿಂದ, S ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ನಾವು ನೀಡಿರುವ ಸಂಭವತೆಗಳು ಸಮಂಜಸವಾಗಿವೆ.

A ಎಂಬುದು Sನಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯಾದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (9·2)ದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದಂತೆ ಸಂಭವತೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ A ಗೆ ಹೆಚ್ಚುತಕ್ಕ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಈ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು "B ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಾಗ Aಯ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ" ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $P(A \mid B)$ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಮೇರೆಗೆ, ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆಯು ಆ ಘಟನೆಯಲ್ಲಿನ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗುವುದು ; ಆದುದರಿಂದ, A ನಲ್ಲಿನ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳನ್ನು (A ನಲ್ಲಿನ e ಗಳನ್ನು) ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆಗಳ ಮೊತ್ತ

ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ $P(A \mid B)$ ದೊರೆಯುವುದು. A ನಲ್ಲಿದ್ದು ಆದರೆ B ನಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವತೆ ಸಮೀಕರಣ (9·2) ರ ಪ್ರಕಾರ 0 ಆಗುವುದು. ಆದಕಾರಣ, $P(A \mid B)$ನ್ನು ಪಡೆಯಲು A, B ಎರಡರಲ್ಲೂ ಇರುವ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೂಡಿದರೆ ಸಾಕು ; ಅಂದರೆ $A \cap B$ಗೆ ಸೇರ್ಪಡೆಯಾದ e ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಅವಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ $P(e \mid B)$ ಗಳನ್ನು ಕೂಡಬೇಕು. ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಛೇದ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅಂಶಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು $P(B)$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಅಭೀಷ್ಟ ಫಲವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಅಂಶಗಳ ಮೊತ್ತ $= P(A \cap B)$. ಆದುದರಿಂದ

$$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B), \quad \text{.... (9·4)}$$

ಹಾಗೂ $$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) \quad \text{.... (9·5)}$$

ಇದನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಭವತೆಯ ಸೂತ್ರ (compound probability law) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$P(A \cap B)$ ಅನ್ನು $P(AB)$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದು ಹಿಂದಿನ ಪದ್ಧತಿ. ಇದನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ (9·4) ಅನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$P(A \mid B) = P(AB)/P(B) \quad \text{.... (9·6)}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $P(B) \neq 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, $P(A) > 0$ ಇದ್ದಾಗ

$$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A) \quad \text{.... (9·7)}$$

ಮತ್ತು $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) \quad \text{.... (9·8)}$$

A, B ಘಟನೆಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದ್ದಾಗ, A ಯ ಸಂಭವತೆಯು B ಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲ; ಅಂದರೆ, B ಸಂಭವಿಸಲಿ ಅಥವಾ ಸಂಭವಿಸದಿರಲಿ, A ಯ ಸಂಭವತೆಯಲ್ಲಿ ಇದರಿಂದ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದಕಾರಣ

$$P(A) = P(A \mid B) \quad \text{.... (9·9)}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಬದಿಯ ಪದವನ್ನು Aಯ ಅನಧೀನ ಸಂಭವತೆ (unconditional probability) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, A, B ಘಟನೆಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿರುವುವೆಂದರೆ, B ಗೊತ್ತಾದಾಗ A ಯ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆಯು A ಯ ಅನಧೀನ ಸಂಭವತೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, A, B ಸ್ವತಂತ್ರ ಘಟನೆಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ

$$P(B) = P(B \mid A) \quad \text{.... (9·10)}$$

ಆದುದರಿಂದ, A, B ಘಟನೆಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದ್ದಾಗ

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad .... \quad (9 \cdot 11)$$

ಇದನ್ನು ಸಂಭವತೆಯ ಗುಣನ ಸೂತ್ರ (multiplication law) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಸಾಚಾ ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ಗರ 4 ಬೀಳುವುದರ ಸಂಭವತೆ 1/6 ಇರುವುದು. ಬಿದ್ದ ಗರ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಾಗ ಗರ 4 ಬೀಳುವುದರ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಗರ = 4 ಎಂಬ ಘಟನೆಯನ್ನು A ಎಂತಲೂ, ಗರ = ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು B ಎಂತಲೂ ಕರೆಯೋಣ. ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆ B ಅನ್ನು ಗರ 2, 4, 6 ಎಂಬ ಮೂರು ಸರಳ ಘಟನೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಒಡೆಯಬಹುದು ; ಅಂದರೆ, $B = (2 \cup 4 \cup 6)$. ಆದುದರಿಂದ,

$$P(B) = P(2 \cup 4 \cup 6) = P(2) + P(4) + P(6) = 3/6.$$

($\because$ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗರದ ಸಂಭವತೆಯೂ 1/6 ಇರುವುದು.)

ಆದುದರಿಂದ, ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ

$$P(A \mid B) = P(A)/P(B) = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

ಮೂಲ ತತ್ವಗಳಿಂದ ಇದೇ ಉತ್ತರವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಈ ಪ್ರಯೋಗದ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ಪ್ರತಿ ಗರದ ಸಂಭವತೆ = 1/6. ಬಿದ್ದ ಗರ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಾಗ 1, 3, 5 ಎಂಬ ಘಟನೆಗಳು ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದಿಂದ ತೊಡೆದುಹೋಗುತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ, ಈ ಘಟನೆಗಳು ಅಸಂಭವವಾಗುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶ ಮೊಟಕು ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಮೊಟಕು ಬಿದ್ದ ಈ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶವನ್ನು ಅಧೀನ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶ (conditional sample space) ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ $P(1 \mid$ ಗರ = ಸಮಸಂಖ್ಯೆ$)$ ಎಂಬ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ 0 ಆಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿ $P(3 \mid$ ಗರ = ಸಮಸಂಖ್ಯೆ$)$ $= P(5 \mid$ ಗರ = ಸಮಸಂಖ್ಯೆ$) = 0$. ಹಾಗೂ ಮೊಟಕು ಬಿದ್ದ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದಲ್ಲಿ ಈಗ 2, 4, 6 ಎಂಬ ಮೂರೇ ಘಟನೆಗಳಿರುವುವು. 3ನೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ, ಸಮಸಂಭವ ಹಂಚಿಕೆಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಈ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಭವತೆಗಳನ್ನು ನೀಡೋಣ. ಸಂಭವತೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ 1 ಇರಬೇಕಾದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆ 1/3 ಇರಬೇಕೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಅಂದರೆ

$$P(2 \mid \text{ಗರ} = \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ}) = P(4 \mid \text{ಗರ} = \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ}) = P(6 \mid \text{ಗರ} = \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ}) = 1/3.$$

ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪಡೆದ ಉತ್ತರದೊಡನೆ ಇದು ತಾಳೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನ ದಾಳವನ್ನು ಸಾಚಾ ದಾಳವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ. ದಾಳವು ಕುಟಿಲವಾಗಿದ್ದಾಗ್ಲೂ ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಕುಟಿಲ ದಾಳದ ಗರಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಗರ	1	2	3	4	5	6
ಸಂಭವತೆ	0·10	0·25	0·20	0·20	0·10	0·15

ಒಂದು ಎಸೆತದಲ್ಲಿ ಬಿದ್ದ ಗರ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಾಗ ಗರ 1, ಗರ 3, ಗರ 5 ಎಂಬ ಘಟನೆಗಳು ತೊಡೆದುಹೋಗುತ್ತವೆ; ಮೊಟಕು ಬಿದ್ದ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶ ದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಘಟನೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಉಳಿಯುತ್ತವೆ: 2, 4, 6. ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮಂಜಸ ವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಸದಾಗಿ ಸಂಭವತೆಗಳನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ಅಂಥ ಸಂಭವತೆಗಳು ಅನೃಣವಾಗಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 1 ಆಗಬೇಕು ಎಂಬ ಈ ನಿಯಮಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ನಿಯಮವನ್ನು ಈಗ ವಿಧಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇನೆಂದರೆ, ಈ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಬೆಲೆಗಳು ಬದಲಾಗಬಾರದು. ಈ ಮೂರು ಗರಗಳ ಅನಧೀನ (unconditional) ಸಂಭವತೆಗಳು 0·25, 0·20, 0·15 ಇರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆಗಳು ಇದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಬೇಕು. ಅಂದರೆ,

$$\frac{P(2 \mid \text{ಗರ} = \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ})}{0{\cdot}25} = \frac{P(4 \mid \text{ಗರ} = \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ})}{0{\cdot}20} = \frac{P(6 \mid \text{ಗರ} = \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ})}{0{\cdot}15}$$

$$\therefore \text{ಪ್ರತಿ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೂ} = \frac{\text{ಅಂಶಗಳ ಮೊತ್ತ}}{\text{ಛೇದಗಳ ಮೊತ್ತ}} = \frac{1}{0{\cdot}60} = \frac{1}{P(\text{ಗರ} = \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ})}$$

ಆದುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟನೆಯ ಅನಧೀನ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು 1/0·60 ಎಂಬ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ (ಅಥವಾ ಉಬ್ಬಿಸಿದರೆ) ಸಂವಾದಿಯಾದ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ ದೊರೆಯುವುದು. ಈ ಮೇರೆಗೆ ಲಭಿಸುವ ಫಲಗಳು ಇಂತಿವೆ:

$$P(2 \mid \text{ಗರ} = \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ}) = \frac{0{\cdot}25}{0{\cdot}60} = \frac{5}{12};$$

$$P(4 \mid \text{ಗರ} = \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ}) = \frac{0{\cdot}20}{0{\cdot}60} = \frac{4}{12};$$

$$P(6 \mid \text{ಗರ} = \text{ಸಮಸಂಖ್ಯೆ}) = \frac{0{\cdot}15}{0{\cdot}60} = \frac{3}{12}.$$

ಸೂಚನೆ : ಸಮೀಕರಣ (9.2)ಅನ್ನು ಬಳಸಿದರೂ ಇದೇ ಫಲಗಳು ದೊರೆಯುವುವು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮುವ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಡೆಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ತಲೆ ಮೇಲಾಗಿ ಬಿದ್ದರೆ 'ಜಯ'ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಬಾರಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ಅದು ತಲೆ ಮೇಲಾಗಿ ಬಿತ್ತು ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಈ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ 3 ಜಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

ಒಡಪು : 3 ಜಯಗಳನ್ನು ಗಳಿಸುವ ಘಟನೆಯನ್ನು B ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸೋಣ. ಆಗ $P(B) = P(3 \text{ ಜಯಗಳು}) = 1/8$.

ಮೊದಲನೇ ಬಾರಿ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ತಲೆ ಮೇಲಾಗಿ ಬೀಳುವ ಘಟನೆಯನ್ನು A ಎಂದು ಕರೆಯುವ. ಆಗ $P(A) = 1/2$. ಆದುದರಿಂದ, ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ $P(B \mid A)$ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $P(B)$ಅನ್ನು $1/P(A)$ ಎಂಬ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ, $P(B \mid A) = \dfrac{P(B)}{P(A)}$ ಆಗುವುದು. ಈ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ $P(B \mid A) = \dfrac{1/8}{1/2} = \dfrac{1}{4}$.

ಅಂದರೆ, ಮೊದಲನೇ ಬಾರಿ ತಲೆ ಮೇಲಾಗಿ ಬಿತ್ತು ಎಂದು ತಿಳಿದಾಗ, 3 ಜಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ 1/4 ಇರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 2

ಒಂದು ಕಛೇರಿಯಲ್ಲಿ 60 ಜನ ಗಂಡಸರೂ 40 ಜನ ಮಹಿಳೆಯರೂ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿರುವರು. ಗಂಡಸರಲ್ಲಿ 40 ಮಂದಿ ವಿವಾಹಿತರೂ 20 ಮಂದಿ ಅವಿವಾಹಿತರೂ ಇರುವರು. ಮಹಿಳೆಯರಲ್ಲಿ 30 ಜನ ವಿವಾಹಿತರೂ 10 ಜನ ಅವಿವಾಹಿತರೂ ಇರುವರು.

ಇವರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆರಿಸುತ್ತೇವೆ ಎನ್ನೋಣ. ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಹೀಗೆ ನಾಮಕರಣ ಮಾಡುವಾ :

A : ಗಂಡಸರನ್ನು ಆರಿಸುವ ಘಟನೆ.

B : ವಿವಾಹಿತರನ್ನು ಆರಿಸುವ ಘಟನೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $P(A) = P$(ಗಂಡಸು) $= 60/100$

$P(B) = P$(ವಿವಾಹಿತ) $= 70/100$

	ವಿವಾಹಿತರು	ಅವಿವಾಹಿತರು	
ಗಂಡಸರು	40	20	60
ಹೆಂಗಸರು	30	10	40
	70	30	100

$P(AB) = P$(ಗಂಡಸು ವಿವಾಹಿತ) $= 40/100$

$P(B \mid A) = P$(ವಿವಾಹಿತ | ಗಂಡಸು) $=$?

ಗಂಡಸನ್ನು ಆರಿಸಿದ್ದೇವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಆತ ವಿವಾಹಿತನಾಗಿರುವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ ಏನು ?

ಗಂಡಸನ್ನು ಆರಿಸಿದ್ದೇವೆ, ಆದುದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಪರಿಶೀಲನೆಯಲ್ಲಿನ ವಿಶ್ವದ ಗಾತ್ರ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಗಂಡಸರನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಈ ಉಪವಿಶ್ವ ಅಥವಾ ಅಧೀನ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಗಾತ್ರ 60 ; ಈ ಉಪವಿಶ್ವದಲ್ಲಿ 40 ವಿವಾಹಿತರಿರುವರು. ಆದುದರಿಂದ ಒಬ್ಬ ವಿವಾಹಿತನನ್ನು ಆರಿಸುವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ $= 40/60$; ಅಂದರೆ P(ವಿವಾಹಿತ | ಗಂಡಸು) $= 40/60$. ಇದನ್ನೇ,

$$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A)$$

ಎಂಬ ಸಾಮ್ಯದಿಂದಲೂ ಪಡೆಯಬಹುದು. $P(A \cap B) = 40/100$, ಮತ್ತು

$$P(A) = 60/100. \quad \therefore P(B \mid A) = \frac{40/100}{60/100} = \frac{40}{60}.$$

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ಪ್ರತಿದರ್ಶಕರಣ

4·1

ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ವಿಶ್ವದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜುಮಾಡಲು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿಶ್ವದ ಒಂದು ಉಪಗಣಕ್ಕೆ ನಿದರ್ಶ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿದರ್ಶ (sample) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಹಾಗೆ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಪ್ರತಿದರ್ಶನ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿದರ್ಶಕರಣ (sampling) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಪ್ರತಿದರ್ಶದಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆಗೊಳ್ಳಲು ವಿಶ್ವದ ಪ್ರತಿ ವಸ್ತುವಿಗೂ ಸಮಾನ ಸಂಭವತೆಯಿದ್ದರೆ, ಈ ಪ್ರತಿದರ್ಶವನ್ನು ಸಮ ಸಂಭವ ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಅಥವಾ ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರತಿದರ್ಶ (random sample) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಪ್ರತಿದರ್ಶವನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯ. ಆದರೆ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರತಿದರ್ಶವನ್ನೇ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ವಿಶ್ವದ ಪ್ರತಿ ವಸ್ತುವಿಗೂ ಸಮಾನ ಸಂಭವತೆ ಇರುವಂತೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದ ಆಯ್ಕೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಆಯ್ಕೆಗೊಂಡ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪ್ರತಿದರ್ಶದ ಗಾತ್ರ (size) ಎಂದು ಹೆಸರು.

4·2

ಒಂದು ವಿಶ್ವದಿಂದ ಪ್ರತಿದರ್ಶವನ್ನು ಆರಿಸುವಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬಹುದು. ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇಸಮನ್ನು ಅಥವಾ ವಸ್ತುವನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ದೊರೆತ ವಸ್ತು ಯಾವುದು ಎಂದು ಗುರುತುಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಆ ವಸ್ತುವನ್ನು ಮತ್ತೆ ವಿಶ್ವಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವುದು. ಅನಂತರ, ಮೊದಲಿನಂತೆಯೇ ವಿಶ್ವದಿಂದ ಮತ್ತೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆರಿಸುವುದು. ವಿಶ್ವದಿಂದ ಎಷ್ಟು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕೋ ಅಷ್ಟುಸಲ ಮರಳಿ ಮರಳಿ ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು. ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ "ಪುನಃಸ್ಥಾಪಿತ ಪ್ರತಿದರ್ಶನ" (sampling with replacement) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಪುನಃಸ್ಥಾಪಿತ ಪ್ರತಿದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವಸ್ತು ಹಲವು ಬಾರಿ ಆಯ್ಕೆಗೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಹಾಗೂ, ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದಾಗ n^r ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ.

4·3

ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರತಿದರ್ಶನವನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡುವ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧಾನವೆಂದರೆ n ವಸ್ತುಗಳ ವಿಶ್ವದಿಂದ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಆಯ್ದ ಮೇಲೆ ಅದನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಿಡುವುದು; ಎರಡನೆಯ ಆಯ್ಕೆಯಲ್ಲಿ ಅದು ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ; ಉಳಿದ $(n-1)$ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಲಾಗುವುದು. ಈ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪುನಃಸ್ಥಾಪನೆ ಇಲ್ಲದ ಪ್ರತಿದರ್ಶನ (sampling without replacement) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದಾಗ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು $n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

4·4 ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರತಿದರ್ಶದ, ಅಂದರೆ ಸಮಸಂಭವ ನಿದರ್ಶದ ಆಯ್ಕೆ

ನಿದರ್ಶವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಆರಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದ ಹೊರತು ನಿದರ್ಶ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ವಿಶ್ವಗುಣ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅನುಮಾನ ಮಾಡುವಂತಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಮೊದಲು ಅದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ 8 ಮಂದಿ ಉತ್ತಮ ಭಾಷಣಕಾರರಿದ್ದಾರೆನ್ನಿ. ಇವರಲ್ಲಿ ಮೂವರನ್ನು ಅಂತರಕಾಲೇಜು ಯುವಜನ ಮೇಳದ ಭಾಷಣ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಲು ಕಳುಹಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ನಾನು ಹೋಗಬೇಕು, ತಾನು ಹೋಗಬೇಕೆನ್ನುತ್ತಿರುವರು. ಪಾಪ, ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಾಲರು ಏನು ಮಾಡಬೇಕು ? ಏನಾದರೂ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಹಗರಣ, ಚಳುವಳಿ, ಸತ್ಯಾಗ್ರಹ, ಘೇರಾವ್ ಎಲ್ಲ ನಡೆಯಬಹುದು. ಚೀಟಿ ಎತ್ತಿ ಯಾರನ್ನು ಕಳುಹಿಸಬೇಕೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗುವುದೆಂದು ಪ್ರಿನ್ಸಿಪಾಲರು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಏರ್ಪಾಡು ಎಂದು ಎನಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆ ? ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರಿಗೂ $1, 2, 3, \ldots, 8$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 8 ಸಣ್ಣ ರಟ್ಟಿನ ತುಂಡುಗಳಮೇಲೆ ಬರೆದು ಒಂದು ಡಬ್ಬಿಯೊಳಗೆ ಹಾಕಿ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಕುಲುಕಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅನಂತರ ಸ್ಪರ್ಧೆಗೆ ಸೇರದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೊಬ್ಬನನ್ನು ಕರೆದು ಅವನ ಕಣ್ಣುಗಳಿಗೆ ಬಟ್ಟೆ ಬಿಗಿದು ಕಟ್ಟಿ ಅವನ ಕೈಯಲ್ಲಿ 3 ಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಎತ್ತಿಸುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಯಾವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೂ ಪಕ್ಷಪಾತ ತೋರಿದಂತಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಪುನಃ ಸ್ಥಾಪನೆ ಇಲ್ಲದ ಪ್ರತಿದರ್ಶ ದೊರೆಯುವುದು.

8 ಜನ ಭಾಷಣಕಾರರಿರುವಾಗ ಅವರಲ್ಲಿ ಮೂವರನ್ನು $_8C_3=56$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ 56 ಬಗೆಗಳನ್ನೂ ಹೀಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ ನಮೂದಿಸಬಹುದು.

123	136	157	237	258	356	458
124	137	158	238	267	357	467
125	138	167	245	268	358	468
126	145	168	246	278	367	478
127	146	178	247	345	368	567
128	147	234	248	346	378	568
134	148	235	256	347	456	578
135	156	236	257	348	457	678

ಅಂದರೆ, ಒಟ್ಟು 56 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿದರ್ಶವನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಬಹುದು. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪ್ರತಿದರ್ಶದ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಭವತೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರತಿದರ್ಶವೂ ಸಮಾನಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಪ್ರತಿದರ್ಶಗಳು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಹೀಗೆ n ವಸ್ತುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ವಿಶ್ವದಿಂದ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪನೆ ಇಲ್ಲದೆ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಬಹುದಾದ r ಗಾತ್ರದ ಒಟ್ಟು $\binom{n}{r}$ ಪ್ರತಿದರ್ಶಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಸಮವಾದ ಸಂಭವತೆ ಲಭಿಸುವಂತೆ ಅಳವಡಿಸಿದರೆ, ಅಂಥ ಆಯ್ಕೆಯು ಯದೃಚ್ಛಾ ನಿದರ್ಶ ಅಥವಾ ಸಮಸಂಭವ ನಿದರ್ಶನವಾಗುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದರೆ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಲಾಟರಿ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅಂದರೆ ಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಎತ್ತುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಳಸಿ ಯದೃಚ್ಛಾ ನಿದರ್ಶವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಕಷ್ಟತರವಾದ ಮತ್ತು ರೇಜಗಿಯ ಕೆಲಸ. ಪ್ರತಿ ಸಲಕ್ಕೂ ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಷ್ಟು ಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು, ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು ಇತ್ಯಾದಿ ಬಲು ತೊಡಕಿನ ಕೆಲಸಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಬೇಕಾದೀತು. ಇದರಿಂದ ಪಾರಾಗಲು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಒಂದು ಉಪಾಯವನ್ನು ಹುಡುಕಿದ್ದಾರೆ. ಲಾಟರಿ ಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಎತ್ತುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅದೃಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆದು ಅವುಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ ಇಟ್ಟಿರುವರು. ಇದಕ್ಕೆ ಯದೃಚ್ಛಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ ಅಥವಾ ಯದೃಚ್ಛಾಂಕ ಕೋಷ್ಟಕ ಎಂದು ಹೆಸರು. ನಾವೇ ನಡೆಸಿದ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ಇಂಥ ಕೋಷ್ಟಕ ದೊರೆತಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು.

ಅಂಥ ಕೋಷ್ಟಕದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಯದೃಚ್ಛಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ

3134	5238	5793	7244	7865	0261
0141	1592	4376	1627	6783	7751
3580	2350	0205	6231	8526	8673
8895	4677	1500	6834	1445	8913
2703	1916	9507	5611	6940	0817
1651	2318	7376	8827	5983	6722
5740	4700	4376	4829	4425	5470
4821	1043	4113	5341	2807	4859
5773	8097	8330	9306	7140	1155
4060	6597	5316	0180	6343	4647
5193	2698	4013	5704	3007	7180
5980	1099	5131	8754	9474	9507
8470	9277	6147	1106	8036	4694
8656	7999	7477	3571	3839	6255
1019	7205	8489	1752	7765	6104
7099	5543	1897	2433	3655	4164
3933	6916	8344	9397	4688	7914
5411	4671	0135	2349	7673	2313
6001	9424	3223	7072	7184	9645
9903	9476	4754	1211	3566	7550
1597	2898	0273	7790	9219	9433
5658	0019	5581	4381	9847	7204
5678	3190	8786	3555	5188	5163
0132	6541	6349	1455	6578	3990
4448	2386	8029	2503	7498	9127
9925	1594	9010	4037	1170	3335
6775	3371	8388	3443	7318	6913
7251	3948	1434	1615	6379	4102
9214	9218	7434	8803	7189	8987
4700	7865	6965	5155	1979	5496

1943	3260	8492	9446	3405	6631
7001	8547	6435	7285	9278	3732
6497	8225	7228	1855	3883	8810
0957	7869	8263	2955	0186	4651
1343	4663	1730	2172	2476	0362
8100	7923	6795	6154	9997	7931
5418	3297	6306	8615	1186	6099
0047	1307	4951	5312	7602	7248
1588	6865	7427	7386	7412	5948
2380	4753	9360	8747	7035	1611
6787	8941	9149	8912	9572	4149
6482	8584	4393	8647	1488	1048
8871	5634	4009	4835	7192	2537
7614	7630	5258	7013	1248	5661
0970	7345	5796	8080	8175	3351
7472	3341	9941	9871	5812	6514
5290	6218	9606	1270	8543	5870
7574	5125	2898	3332	1170	1040
6896	7180	9094	0960	6241	7597
4630	5692	0543	8673	1889	5487
8554	7078	5364	6081	5422	0488
1171	6329	2727	2808	4789	6235
9445	4002	8291	0373	2595	5794
5116	2784	1641	9865	0888	7109
1259	6950	9820	5031	6313	4026
3649	9154	6521	7645	3315	8825
6419	2200	6091	9854	6994	8150
8796	0085	2204	6606	9195	8483
1018	1355	7798	1050	0332	3666
6621	5341	7309	0803	5405	1663

100 ಜನ ಕೆಲಸಗಾರರಲ್ಲಿ 10 ಜನರನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆರಿಸಬೇಕೆನ್ನೋಣ. ಮೊದಲು ಅವರಿಗೆ ಒಂದರಿಂದ ನೂರರವರೆಗೆ ಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (ಜಂಜರು ನಂಬರು) ಕೊಡಬೇಕು. ಯದೃಚ್ಛಾಂಕ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಓದುತ್ತಾ ಹೋಗಬೇಕು. ಇವೇ ಆಯ್ಕೆಗೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು; ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯುಳ್ಳ ಕೆಲಸಗಾರರೇ ಆಯ್ಕೆಗೊಂಡವರೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಐದನೇ ಸಾಲಿನ 2 ನೇ ಖಂಡವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ ಸಿಗುವ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 19. ಇಲ್ಲಿಂದ ಮೊದಲು ಮಾಡಿ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಸಾಗಲು ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರೆವುವು : 19, 16, 95, 07, 56, 11, 69, 40, 08, 17. ಈ ಹತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಯ್ಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವುವು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಕೆಲಸಗಾರರು ಆಯ್ಕೆಗೊಂಡಿದ್ದಾರೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ 00 ಬಂದರೆ ಅದನ್ನು 100 ಎಂದು ತಿಳಿಯತಕ್ಕದ್ದು.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ 19 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಹೋಗದೆ ಮೇಲಿಂದ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಹೋಗಬಹುದು. ಆಗ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. 19, 23, 47, 10; 80, 65, 26, 10, 92, 79, 72. ಈ ಹತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಈಗ ಆಯ್ಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವುವು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಂಟನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 10 ಮೊದಲೇ ಒಂದು ಬಾರಿ ಬಂದಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 72ರ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 55 ಅನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. ಯದೃಚ್ಛಾ ನಿದರ್ಶ ಎಂದರೇನು. ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿ.

2. ಪುನಃಸ್ಥಾಪಿತ ಪ್ರತಿದರ್ಶಕ್ಕೂ ಪುನಃಸ್ಥಾಪನೆ ರಹಿತವಾದ ಪ್ರತಿದರ್ಶಕ್ಕೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

3. ಒಂದು ಹಳ್ಳಿಯಲ್ಲಿ 87 ಮನೆಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳಿಂದ 10 ಮನೆಗಳ ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರತಿದರ್ಶವನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 5

ಸಂಭವ ಚಲಕ (Random Variable)

5.1 ಸಂಭವ ಚಲಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಸಂಭವತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಗಣನೆಮಾಡುವ ವಿವಿಧ ಕ್ರಮಗಳನ್ನೂ ಕುರಿತು ಹಿಂದೆ ವಿಮರ್ಶಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಗಿಂತ ಆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಬೆಲೆಗಳು ಗಮನಾರ್ಹವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದು ದೃಷ್ಟಾಂತದಿಂದ ಇದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ಬಹುಮಾನ ಪಡೆಯಬೇಕೆಂಬ ಅಭಿಲಾಷೆಯುಳ್ಳ ಒಬ್ಬ ಲೇಖಕನು ತನ್ನ ಕೃತಿಯನ್ನು ಸಾಹಿತ್ಯ ಅಕಾಡಮಿಗೆ ಸಮರ್ಪಿಸಿ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ಕಾಯುತ್ತಿರುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಕೃತಿಯನ್ನು ವಿಮರ್ಶಕರಿಗೆ ಕಳುಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿಮರ್ಶಕರು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ತಮ್ಮ ತೀರ್ಪನ್ನೀಯುವರು. ಇದನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗವೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು, ಏಕೆಂದರೆ ಪೂರ್ವಭಾವಿಯಾಗಿ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ತಿಳಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ; ಫಲಿತಾಂಶ ಅನಿಶ್ಚಿತವಾದುದು. ಲೇಖಕನ ಕೃತಿಗೆ ಮೊದಲನೇ ಸ್ಥಾನ ದೊರೆಯಬಹುದು, ಇಲ್ಲವೇ ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನ ದೊರೆಯಬಹುದು ಅಥವಾ ಮೂರನೇ ಸ್ಥಾನ ದೊರೆಯಬಹುದು, ಅಥವಾ ಈ ಮೂರರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸ್ಥಾನವೂ ದೊರೆಯದೆ ಹೋಗಬಹುದು. ಹೀಗೆ ನಾಲ್ಕು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾದ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಈ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಫಲಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂಚೆಯೇ ಖಾತರಿಯಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಮಾತನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಲೇಖಕನಿಗೆ ಈ ಬರಿಯ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗಿಂತ ಅವುಗಳ ಸಲುವಾಗಿ ದೊರೆಯುವ ಬಹುಮಾನದ ಮೊಬಲಗು ಮುಖ್ಯವಾದುದು. ಅವನ ಕೃತಿಗೆ ಮೊದಲನೇ ಸ್ಥಾನ ಪ್ರಾಪ್ತವಾದರೆ ಅವನಿಗೆ ರೂ. 5000 ಬಹುಮಾನ ಸಿಗುವುದು ; ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನ ದೊರೆತರೆ ಅವನಿಗೆ ರೂ. 2000 ಬಹುಮಾನ ಸಿಗುವುದು ; ಮೂರನೇ ಸ್ಥಾನ ದೊರೆತರೆ ರೂ. 500 ಬಹುಮಾನ ಸಿಗುವುದು ; ನಾಲ್ಕನೇ ಅಥವಾ ಮುಂದಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಸ್ಥಾನ ದೊರೆತರೆ ಯಾವ ಮೊಬಲಗೂ ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ. 5000, 2000, 500 ಮತ್ತು 0 ಎಂಬ ಈ ಸಾಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಯದೃಚ್ಛಾ ಬೆಲೆಗಳು ಎಂಬ ಹೆಸರನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಈ ಬೆಲೆಗಳೇ ಆ ಲೇಖಕನ ಗುರಿಯಾಗಿರುವುವು. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳ ಘಟನೆಗೂ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಏಕೈಕ ನಿಜಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುವುದಕ್ಕೆ

ಒಂದು ನಿಯಮ ಬೇಕು. ಈ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಸಂಭವ ಚಲಕ ಅಥವಾ ಸಂಭವ ಚರ (random variable) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಅಂದರೆ, ಸಂಭವ ಚಲಕವು ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗದ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳ ಫಲನ (function) ಅಥವಾ ಬಿಂಬಕ (mapping) ಆಗುವುದು. ಈ ಫಲನವನ್ನು X ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

X (1ನೇ ಸ್ಥಾನ) $\rightarrow 5000$ X (2ನೇ ಸ್ಥಾನ) $\rightarrow 2000$

X (3ನೇ ಸ್ಥಾನ) $\rightarrow 500$ X (ಅನ್ಯ ಸ್ಥಾನ) $\rightarrow 0$

ಎಂಬುದಾಗಿ ನಿಗದಿ ಮಾಡುವ ನಿಯಮವನ್ನು ನಮೂದಿಸಬಹುದು.

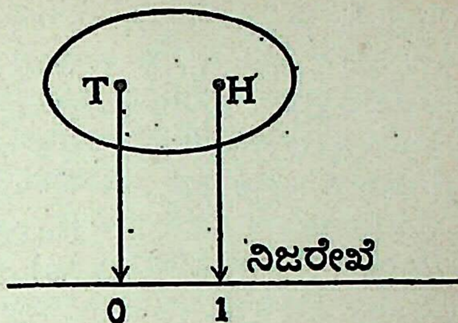
ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಂದು ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗದ ಸಾಧ್ಯವಾದ ವಿವಿಧ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಹಾಗೂ, $X(e_1) \rightarrow x_1$, $X(e_2) \rightarrow x_2 \ldots$, $X(e_n) \rightarrow x_n$ ಇರಲಿ. ಹೀಗೆ e_i ಗಳನ್ನು x_i ಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವ X ಫಲನಕ್ಕೆ ಸಂಭವ ಚಲಕ ಎಂಬ ಹೆಸರನ್ನು ಇಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ.

e_i ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ p_i ಇರಲಿ; ಅಂದರೆ, $p(e_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. ಇದರಿಂದಾಗಿ, $p(X = x_i) = p_i$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, e_i ಸಂಭವಿಸಿದಾಗ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ನಿಯಮದಂತೆ $X(e_i) \rightarrow x_i$ ಆಗುವುದು. ಇದನ್ನೇ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ $X = x_i$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಕೇತದಂತೆ $\Sigma p_i x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$ ಎಂಬುದನ್ನು X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ (mathematical expectation) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಲೇಖಕನ ಕೃತಿಗೆ 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಸ್ಥಾನ ದೊರೆವ ಸಂಭವತೆ 1/20, 1/10, 1/5 ಮತ್ತು 13/20 ಇರುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಲೇಖಕನಿಗೆ ದೊರಕುವ ಬಹುಮಾನದ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ $= \frac{1}{20} \cdot 5000 + \frac{1}{10} \cdot 2000 + \frac{1}{5} \cdot 500 + \frac{13}{20} \cdot 0 = 550$. ಅಂದರೆ, ಅವನ ನಿರೀಕ್ಷೆಯ ಬೆಲೆ ರೂ. 550 ಆಗುವುದು. ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಮುಂದೆ 6ನೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದರೆ ಅದರ ಫಲಿತಾಂಶ ತಲೆ ಇರಬಹುದು ಅಥವಾ ಬಾಲ ಇರಬಹುದು. ತಲೆ ಬಿದ್ದರೆ 1 ಎಂತಲೂ ಬಾಲ ಬಿದ್ದರೆ 0 ಎಂತಲೂ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಗ ಸಂಭವ ಚಲಕ X ಇಂತಿರುವುದು.

$X(H) = X$(ತಲೆ) $\rightarrow 1$, $X(T) = X$(ಬಾಲ) $\rightarrow 0$.

ಈ ಪ್ರಯೋಗದ ಘಟನಾಕಾಶದಲ್ಲಿ H, T ಎಂಬ ಎರಡು ಸರಳ ಘಟನೆಗಳಿವೆ. X ಸಂಭವ ಚಲಕವು ಈ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿ 1, 0 ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ Xನ ಪ್ರದೇಶ ಅಥವಾ ನಿಟ್ಟು (domain) $= \{T, H\}$ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಅಥವಾ ಬೀಸು (range) $= \{0, 1\}$.



ಚಿತ್ರ 5.1

ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳವನ್ನು ಎಸೆದಾಗ ದೊರೆವ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು e_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ e_i ಎಂದರೆ ದಾಳದ ಗರ i ಇರುವುದು ಎಂದು ಅರ್ಥ. X ಸಂಭವ ಚಲಕವು ಈ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುವ ಫಲನವಾಗಿರಲಿ; ಅಂದರೆ, $X(e_i) = i$ ಇರಲಿ. ಆಗ $P(X = i) = \frac{1}{6}$ ಆಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ X ಸಂಭವ ಚರದ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ $= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3\frac{1}{2}$ ಆಗುವುದು.

ಇದಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಸಂಭವ ಚರವನ್ನೂ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $Y(e_i) = i^2$ ಇರುವಂತೆ Y ಸಂಭವ ಚರವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಗ $Y(e_1) = 1$, $Y(e_2) = 4$, $Y(e_3) = 9$, $Y(e_4) = 16$, $Y(e_5) = 25$, $Y(e_6) = 36$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಇದೇ ರೀತಿ ಮತ್ತೊಂದು ಫಲನವೆಂದರೆ, $Z(e_1) = 0$, $Z(e_2) = 3$, $Z(e_3) = 0$, $Z(e_4) = Z(e_5) = Z(e_6) = 1$. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರಳ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿ ಒಂದೇ ಬೆಲೆ 0 ಇದೆ; ಹಾಗೂ, ಮೂರು ಸರಳ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿ ಒಂದೇ ಬೆಲೆ 1 ಇದೆ. ಹೀಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

5.2 ಸಂಭವ ಚಲಕ ಫಲನ

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಂದು ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗದ ಘಟನಾಕಾಶ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಬಿಂದುಗಳು $e_1, e_2, \ldots \ldots e_n$ ಇರಲಿ. ನಿಜಸಂಖ್ಯೆ

ಗಳ (real number) ಗಣವನ್ನು R ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು e_iಗೂ ಅಸಂದಿಗ್ಧವಾಗಿ $X(e_i) = x_i$ ಇದ್ದು, $x_i \in R$ ಇದ್ದಾಗ X ಅನ್ನು ಸಂಭವ ಚಲಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡಲಾದ ಸಂಭವ ಚಲಕವು ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳ ಘಟನೆಗೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ನಿಗದಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಸಂಭವ ಚಲಕವು ಸರಳ ಘಟನೆಯ ಫಲನ ಅಥವಾ ಬಿಂಬಕವಾಗುತ್ತದೆ. $S = \{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ ಗಣವು ಈ ಬಿಂಬಕದ ಪ್ರದೇಶ ಅಥವಾ ನಿಟ್ಟೆ ಆಗುವುದು, ಮತ್ತು $\{x_i\} = \{x_1, x_2 \cdots\} \in R$ ಎಂಬ ಗಣವು ಈ ಬಿಂಬಕದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಅಥವಾ ಬೀಸು (range) ಆಗುವುದು.

ಸಂಭವಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೂ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೂ X ಅನ್ನು ಸಂಭವ ಚಲಕ ಎಂಬ ಅಭಿಧಾನದಿಂದ ಕರೆಯುವರು; ಆದಾಗ್ಗೂ ಇದು ಚಲಕವಲ್ಲ; ಇದು ಒಂದು ಫಲನ ಅಥವಾ ಬಿಂಬಕ (function). ಅಂದರೆ, S ಗಣದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳ ಘಟನೆಗೂ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಏಕೈಕ ನಿಜಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿಗದಿಮಾಡುವ ಒಂದು ಅಸಂದಿಗ್ಧವಾದ ನಿಯಮ. ಸಂಭವಚಲಕವೆಂಬ ಹೆಸರು ಈ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ ಎಂಬ ವಿಚಿತ್ರ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಓದುಗರು ಮನವರಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಲಕ್ಷಣೆಯಿಂದ, ಸಂಭವ ಚಲಕವೆಂದರೆ ಅದರಿಂದ ನಿಯೋಜಿತವಾದ ಬೆಲೆಗಳು ಎಂಬ ಅರ್ಥ ಧ್ವನಿತವಾಗುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ Xನ ಬೀಸು $[x_i]$ ಎಂದು ವಿವಕ್ಷಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಫಲನ (function) ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಎರಡು ಅರ್ಥಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸುವುದುಂಟು. $f(x)$ ಎಂದರೆ xನ f ಎಂಬ ಫಲನ ಎಂದರ್ಥ. ಕೆಲವು ವೇಳೆ $f(x)$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುದು. ಅದೇ ಪ್ರಕಾರವಾಗಿ X ಎಂಬುದನ್ನು ಸಂಭವ ಚಲಕವೆಂಬ ಫಲನ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡಿದ್ದಾಗ್ಗೂ ಅದು ಈ ಫಲನದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ, X ಸಂಭವ ಚಲಕವು $x_1, x_2, \ldots$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ ಎಂತಲೂ ಹೇಳುವುದು ರೂಢಿ.

ಒಂದು ಸಾಚಾ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮುವ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಇರುವುದು. ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$S = \{\; e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \quad e_7 \quad e_8 \;\}$$
$$= \{TTT \; TTH \; THT \; THH \; HTT \; HTH \; HHT \; HHH\}$$

ಈ ಘಟನಾಕಾಶದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಳ ಘಟನೆಗೂ ಸಂವಾದಿಯಾದ ನಿಜಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರ್ಧರಿಸೋಣ; ಆ ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ತಲೆಗಳು ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳು

ತ್ತವೋ ಅದೇ ನಿಗದಿಯಾದ ಸಂವಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆ. ಈ ನಿಯಮವನ್ನು X ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ. ಈ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬಿಂಬಕ ದೊರೆಯುವುದು.

$$\begin{array}{ll} X(e_1) = X(TTT) \to 0 & X(e_5) = X(HTT) \to 1 \\ X(e_2) = X(TTH) \to 1 & X(e_6) = X(HTH) \to 2 \\ X(e_3) = X(THT) \to 1 & X(e_7) = X(HHT) \to 2 \\ X(e_4) = X(THH) \to 2 & X(e_8) = X(HHH) \to 3 \end{array}$$

ಈ ನಿಯಮದ ಮೂಲಕ ನಮಗೆ ದೊರೆತ ಬೆಲೆಗಳೇ $x_1, x_2, \ldots$ ಆಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ $\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\} = \{0\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 3\}$. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಬೆಲೆಗಳು ಎಂದು ವ್ಯವಹರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಭವ ಚಲಕವನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಪ್ರತಿ ಘಟನೆಯಲ್ಲೂ ಎಷ್ಟು ಬಾಲಗಳು ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೋ ಅದೇ ನಿಗದಿಯಾದ ಸಂವಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಈ ಸಂಭವ ಚಲಕವನ್ನು Y ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಈ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ದೊರೆಯುವ ನಿಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿ ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\begin{array}{ll} Y(e_1) = Y(TTT) \to 3 & Y(e_5) = Y(HTT) \to 2 \\ Y(e_2) = Y(TTH) \to 2 & Y(e_6) = Y(HTH) \to 1 \\ Y(e_3) = Y(THT) \to 2 & Y(e_7) = Y(HHT) \to 1 \\ Y(e_4) = Y(THH) \to 1 & Y(e_8) = Y(HHH) \to 0 \end{array}$$

ಹೀಗೆ Y ಸಂಭವ ಚಲಕದಿಂದ ನಿಗದಿಯಾದ ನಿಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$= \{3\quad 2\quad 2\quad 1\quad 2\quad 1\quad 1\quad 0\}$$

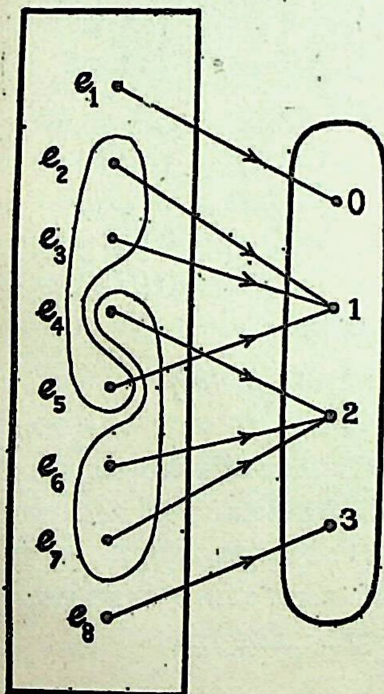
ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟನೆಗೂ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿಗದಿಮಾಡಲಾಗುತ್ತೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಯಾವ ವಿಧವಾದ ಅಸಂದಿಗ್ಧತೆಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಎರಡು ಮೂರು ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ನಿಗದಿಯಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, HHT, HTH, THH ಎಂಬ ಈ ಮೂರು ಸರಳ ಘಟನೆಗಳಿಗೂ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿ X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಮೇರೆಗೆ ಒಂದೇ ನಿಜ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಗದಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

5.3 ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ (Probability Distribution)

ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದ $S = \{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ಎಂಬ ಪ್ರತಿದರ್ಶಾ

ಕಾಶಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ X ಎಂಬ ಒಂದು ಸಂಭವ ಚಲಕವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದ್ದೇವೆ ಎನ್ನಿ. ಇದರ ಮೇರೆಗೆ, $X(e_i) = x_i$. ಇಲ್ಲಿ $\{x_i \mid x_i \in R\}$. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ x_iಗಳು ಬೇರೆಬೇರೆಯಾಗಿರಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರಬಹುದು. ಹಾಗೆ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ, $\{x_i\}$ ಗಣದಲ್ಲಿ nಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮೂಲಾಂಗಗಳಿರುವುವು. ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮುವ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $\{e_i\}$ ಗಣದಲ್ಲಿ 8 ಮೂಲಾಂಗಗಳಿದ್ದು, $\{x_i\}$ ಗಣದಲ್ಲಿ 0, 1, 2, 3 ಎಂಬ ನಾಲ್ಕೇ ಮೂಲಾಂಗಗಳಿರುತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ, $\{x_j\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

ಸೂಚನೆ: ಇಲ್ಲಿ xನ ಒತ್ತರಕ್ಷರವನ್ನು j ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದೆ; ಏಕೆಂದರೆ $\{e_i\}$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ $i = 1, 2, \ldots$ ಇರಬಹುದು; ಆದರೆ ಈಗ $\{x_j\}$ ಗಣದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕೇ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲಾಂಗಗಳಿರುವುವು. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತೋರಿಸಲು iನ್ನು ಬಿಟ್ಟು j ಅನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಮ್ಮ ಗಮನವನ್ನು $\{e_i\}$ಗಣದಿಂದ$\{x_j\}$ ಗಣಕ್ಕೆ ತಿರುಗಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 5.2

x ಎಂಬುದು ಈ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂಬೆಲೆಯಾಗಿರಲಿ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $x=2$ಎಂಬ ಮೂಲಾಂಗವು e_4 ಇಲ್ಲವೆ e_6 ಇಲ್ಲವೆ e_7 ಎಂಬ ವಿಯುತ ಸರಳ ಘಟನೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಿದ್ಧಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನೇ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$X(e_4 \cup e_6 \cup e_7) \rightarrow 2$, ಅಥವಾ

$$X(e_4 + e_6 + e_7) \rightarrow 2.$$

ಈ ಫಲವನ್ನು ಚಿತ್ರ 5·2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಈಗ $S = \{e_i\}$ ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟನೆಗೂ ಸೂಕ್ತವಾದ ಒಂದು ಸಂಭವ ಅಳವನ್ನು ಲಗತ್ತಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ, $P(e_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; ಹಾಗೂ $\Sigma p_i = 1$. ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು x_j ಗೂ ಆ ಬೆಲೆ ಘಟಿಸುವ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಗಣಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ X ಸಂಭವ

ಚಲಕದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಯೂ ಘಟಿಸುವ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$P(X=2) = P(e_4 \cup e_6 \cup e_7) = P(e_4) + P(e_6) + P(e_7)$$
$$= p_4 + p_6 + p_7.$$

ಇದನ್ನು $f(2)$ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಸಂಭವ ಅಳವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು (ಕೋಷ್ಟಕ 5·1).

ಕೋಷ್ಟಕ 5·1

ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಬೆಲೆಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳು

x	$\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k
$f(x)$	$\rightarrow$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$	$f(x_k)$

ಹೀಗೆ ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಬೀಸಿನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ ಅದಕ್ಕೆ ವಿಹಿತವಾದ ಸಂಭವ ಅಳವನ್ನು ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿ ನಿರೂಪಣೆ ಮಾಡುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಸಂಭವ ಚಲಕದ ವಿತರಣೆ (distribution of the random variable) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೂ f ಫಲನವನ್ನು X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಸಂಭವ ಫಲನ (probability function) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 8 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ. ಸಾಧ್ಯವಾದ ಈ 8 ಘಟನೆಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ನೀಡಿದರೆ $p_1 = p_2 = \cdots = p_8 = \frac{1}{8}$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಆಗ $P(X=0) = \frac{1}{8}$, $P(X=1) = \frac{3}{8}$, $P(X=2) = \frac{3}{8}$, $P(X=3) = \frac{1}{8}$ ಎಂಬ ಫಲಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಇವುಗಳನ್ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 5·2

ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ತೂರಿದಾಗ ತಲೆಗಳ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ

x	$\rightarrow$	0	1	2	3
$f(x)$	$\rightarrow$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

5·4 ವಿತರಣ ಫಲನ (Distribution Function)

ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಯು ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಬೀಸಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಯ ಸಂಭವತೆಯನ್ನೂ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. Xನ ಬೀಸನ್ನು $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ. ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈಗ $F(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಹೊಸ ಫಲನವನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$F(x_j) = P(X \leq x_j) = P(X=x_1) + P(X=x_2) + \cdots + P(X = x_j)$$

$$= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{j} f(x_i) = \sum_{i \leq j} f(x_i) \quad \ldots (4{\cdot}1)$$

ಈ ಪ್ರಕಾರವಾಗಿ X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ $P(X \leq x_j)$ ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು, ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು. ಈ ಪಟ್ಟಿಯ ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಮೂದಿತವಾದ

ಕೋಷ್ಟಕ 5·3

ಪರಿಸಂಕಲಿತ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ

$x \rightarrow$	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
$F(x) = P(X \leq x_j) \rightarrow$	$f(x_1)$	$\sum_{i=1}^{2} f(x_i)$	$\sum_{i=1}^{3} f(x_i)$	$\ldots$	$\sum_{i=1}^{k} f(x_i)$

$F(x)$ ಫಲನಕ್ಕೆ X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಸಂಚಿತ ವಿತರಣ ಫಲನ (cumulative distribution function) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನೇ ವಿತರಣ ಫಲನ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವರು. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಬಹುದು.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad \ldots (4{\cdot}2)$$

X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ ದತ್ತವಾದಾಗ ವಿತರಣ ಫಲನವನ್ನು ಈ ಸಾಮ್ಯಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಗಣನೆಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ, X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ವಿತರಣ ಫಲನ F ದತ್ತವಾದಾಗ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಯನ್ನೂ ಸಂಭವ ಫಲನವನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^{j} f(x_i) - \sum_{i=1}^{j-1} f(x_i) = F(x_j) - F(x_{j-1}) \quad \cdots (4\cdot3)$$

ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ 3 ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ ಸಂಭವ ಫಲನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಂಭವ ಚಲಕದ ವಿತರಣ ಫಲನವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದ್ದರಿಂದ ದೊರೆತ ಫಲಿತವನ್ನು ಇದರಡಿ ಕಾಣಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 5.4
ವಿತರಣ ಫಲನದ ಪಟ್ಟಿ

x	0	1	2	3
$F(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. ಒಂದು ಸಾಚಾ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ದೊರೆವ ತಲೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು X ಎಂಬ ಸಂಭವ ಚಲಕದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದೆ. X ನ ನಿಟ್ಟನ್ನೂ, ಬೀಸನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. X ನ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ ಏನು ?

2. ಎರಡು ಸಾಚಾ ದಾಳಗಳನ್ನು ತೂರಿದಾಗ ಬೀಳುವ ಗರಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು X ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ. X ಸಂಭವ ಚರದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ಸಾಚಾ ದಾಳದ ಮೇಲಣ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅಳಿಸಿದ ನಂತರ 2 ಬದಿಗಳಿಗೆ ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣವನ್ನೂ, 2 ಬದಿಗಳಿಗೆ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣವನ್ನೂ 2 ಬದಿಗಳಿಗೆ ಹಸಿರು ಬಣ್ಣವನ್ನೂ ಬಳಿದಿದೆ. ಈ ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ತೂರುವ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯಬಹುದಾದ ಎಲ್ಲ ಘಟನೆಗಳನ್ನೂ ನಿರೂಪಿಸಿ.

ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣಕ್ಕೆ 0ನ್ನೂ, ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣಕ್ಕೆ 1ನ್ನೂ, ಹಸಿರು ಬಣ್ಣಕ್ಕೆ 2ನ್ನೂ ನೀಡುವಂತೆ ಸಂಭವ ಚಲಕವನ್ನು ನಿಗದಿಮಾಡಿದೆ. ಆ ಸಂಭವ ಚಲಕದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಗಣನೆಮಾಡಿ.

4. ಒಂದು ಕುಡಿಕೆಯಲ್ಲಿ 5 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳೂ 4 ಕರಿ ಗೋಲಿಗಳೂ ಇವೆ. ಯದೃಚ್ಛಾ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ 4 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಆಯ್ದು ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. X ಸಂಭವ ಚಲಕವು ಈ ಆಯ್ಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಳಿಯ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಯಾದರೆ X ನ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಯನ್ನೂ ವಿತರಣ ಫಲನವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ 10 ದೀಪದ ಬಲ್ಬುಗಳ ಪೈಕಿ 3 ಊನವಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪನೆ ರಹಿತವಾಗಿ 4 ಬಲ್ಬುಗಳನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆಯ್ದುಕೊಂಡಿದೆ. X ಸಂಭವ ಚಲಕವು ಈ ಆಯ್ಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಊನ ಬಲ್ಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ X ನ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಯನ್ನೂ ವಿತರಣ ಫಲನವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಕುಡಿಕೆಯಲ್ಲಿ 10 ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳೂ 5 ಕೆಂಪು ಗೋಲಿಗಳೂ ಇವೆ. ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ 5 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯುತ್ತೇವೆ. X ಸಂಭವ ಚಲಕವು ಈ ಆಯ್ಕೆಯಲ್ಲಿನ ಬಿಳಿಯ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆಯಾದರೆ X ನ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ ಹೀಗಿದೆ.

x :	0	1	2	3	4	5	6
p :	k	$3k$	$5k$	$7k$	$9k$	$11k$	$13k$

ಹಾಗಾದರೆ (i) k ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $P(X < 2)$, $P(X \geqslant 2)$, $P(0 < X < 4)$ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) X ನ ವಿತರಣ ಫಲನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಕುಟಿಲ ದಾಳದ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳು ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರ ಸಂಭವತೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ.

$$P(1) = a,\ P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p\ ;\ P(6) = b.$$

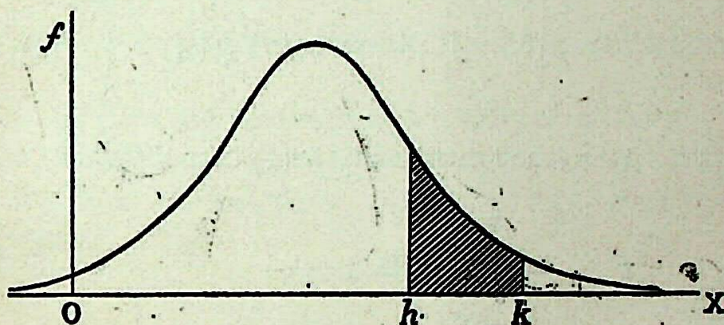
ಈ ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ತೂರಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತದ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5·5 ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯಾವಕ್ರ (Frequency Curve)

ಚಲಕವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು, ಆವೃತ್ತಿ ಸಾರಣಿಯ ಅಂತರಗಳು ಸಣ್ಣದಾದಲ್ಲಿ ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಕೋನವು (frequency polygon) ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಕ್ರವಾಗುವುದು.

ಇದಕ್ಕೆ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರ ಅಥವಾ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯಾವಕ್ರ (frequency curve) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಎಡ ಕೊನೆಯಿಂದ $x=a$ ವರೆಗಿನ ವಕ್ರದ ಕೆಳಗಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅಥವಾ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಫಲನವಾಗುವುದು. $x=h$ ಮತ್ತು $x=k$ ಈ ಅಂತರಗಳ ನಡುವಣ ಸಲೆಯು ಇದೇ ಅಂತರಗಳ ನಡುವೆ X ಸಂಭವ ಚರದ ಬೆಲೆ ಇರುವ ಸಂಭವತೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು (ಚಿತ್ರ 5·3). ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $P(h \leqslant x < k)$ ಸಂಭವತೆಯು ಈ ಅಂತರಗಳ ನಡುವಣ ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರದ ಸಲೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ,

$$P(h \leqslant x < k) = \int_{h}^{k} f(u)\, du \qquad \cdots (5{\cdot}1)$$



ಚಿತ್ರ 5.3 : ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರ

ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಒಟ್ಟು ಆಕಾಶವನ್ನು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೇರೆ ಬೇರೆ A_j ಪ್ರದೇಶಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲೂ X ಸಂಭವ ಚರವು ಖಚಿತವಾದ x_i ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದುವಂತೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. X ಚಲಕವು ಒಂದು ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಬೆಲೆ x ಮತ್ತು $x + dx$ ಇವುಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವುದರ ಸಂಭವತೆ $f(x)\,dx$ ಇರುವುದು. ಇಂಥ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ನ್ನು X ಚಲಕದ ಸಂಭವ ಸಾಂದ್ರತೆ (probability density) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದು ಒಂಟಿ ಬೆಲೆಯ (single valued) ಅನೃಣ (non-negative) ಫಲನವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ನಿರ್ವಚನ ಪ್ರಾಂತದ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆಲ್ಲ ($x=a$ ಇಂದ $x=b$ ವರೆಗೆ) ಅನುಕಲ್ಯವಾಗಿದ್ದು

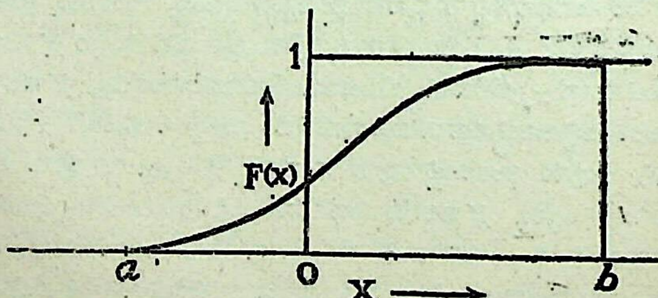
$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \qquad \cdots (5\cdot2)$$

ಆಗುವಂತಿರುವುದು. ಸೌಲಭ್ಯಕ್ಕಾಗಿ xನ ಬೆಲೆಯ ಪ್ರಾಂತವನ್ನು $-\infty$ ಇಂದ $+\infty$ ವರೆಗೆ ಇರುವುದೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲದ Xನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $f(x) = 0$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದು ರೂಢಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, X ಅನೃಣವಾಗಿರಬಹುದು. ಅಂಥ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ Xನ ಋಣ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $f(x) = 0$ ಆಗುವುದು ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದು ರೂಢಿ.

ಸಂಭವ ಚಲಕ Xನ ಬೆಲೆ, α ಮತ್ತು β ಗಳ ನಡುವೆ ಇದ್ದಾಗ A ಘಟನೆ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದಿದ್ದರೆ, A ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ $P(A) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ ಆಗುವುದು. $X \leqslant x$ ಇದರ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು $F(x)$ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಿದರೆ

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \qquad \cdots (5\cdot3)$$

ಇಲ್ಲಿ $F(x)$ ಫಲನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಸಂಭವ ಚರದ ವಿತರಣ ಫಲನವಾಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 5.4

$F(x)$ನ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು :

(1) ಇದು ಅನೃಣವಾಗಿರುವುದು

(2) ಇಳಿಮುಖವಾಗಿಲ್ಲದಿರಬೇಕು

(3) ಇದು 0 ಮತ್ತು 1 ಇವೆರಡರ ನಡುವಣ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿರಬೇಕು.

ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಿತರಣ ಫಲನದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು 5·4 ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

6 ನಿರೀಕ್ಷೆ (Expectation)

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಮೊದಲನೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸಂಭವ ಚರದ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕುರಿತು ಹೇಳಿದೆವು. ಈಗ ಅದನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. X ಸಂಭವ ಚರದ ಬೀಸನ್ನು $\{x_j\}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ; ಹಾಗೂ $P(X=x_j) = p_j,\ j = 1, 2, \ldots n$ ಇರಲಿ. ಅಂದರೆ, x_j ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ಘಟಿಸುವ ಸಂಭವತೆ p_j ಇರುತ್ತದೆ.

$\therefore \Sigma p_j = 1$. ಆಗ $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ ಎಂಬುದನ್ನು X ಸಂಭವಚರದ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಅಥವಾ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ (mathematical expectation) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $E(X)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಂಭವತೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯವಹರಿಸಬಹುದೆಂದು ಹಿಂದೆ ವಿವರಿಸಿದ್ದೇವೆ. xನ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಹೀಗೆ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 5.5

ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕ

ಬೆಲೆ x : →	x_1	x_2	....	x_j	....	x_n
ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ : p →	p_1	p_2	....	p_j	....	p_n

ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಮಧ್ಯಮ (mean) ವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಬಹುದು, ಹಾಗೂ $\overline{X} = \Sigma p_j x_j$ ಆಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವ ವಿಧಾನವೂ xನ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯಾ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವ ವಿಧಾನವೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಮಧ್ಯಮವನ್ನು μ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುವುದುಂಟು. ಆದುದರಿಂದ

$$E(X) = \overline{X} = \mu = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \qquad \ldots 6{\cdot}1$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. 5·2ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಭವ ಚಲಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕೋಣ.

ಕೋಷ್ಟಕ 5.6

ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆಯ ಗಣನಾಕ್ರಮ

x_j	p_j	$x_j p_j$
0	1/8	0
1	3/8	3/8
2	3/8	6/8
3	1/8	3/8
ಮೊತ್ತ	1	12/8

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಮೇರೆಗೆ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಲು, $E(X) = \Sigma p_j x_j = 12/8 = 1{\cdot}5$. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದರೆ ತಲೆ ಕಾಣಿಸುವಂತೆ ಬೀಳುವುದರ ಸಂಭವತೆ p, ಮತ್ತು ಬಾಲ ಕಾಣಿಸುವಂತೆ ಬೀಳುವ ಸಂಭವತೆ $(1-p)$ ಇರುವುದು. ನಾಣ್ಯವನ್ನು ತೂರಿದಾಗ ತಲೆ ಬಿದ್ದರೆ X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು 1 ಎಂತಲೂ, ಬಾಲ ಬಿದ್ದರೆ 0 ಎಂತಲೂ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ Xನ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಏನು ?

ಒಡಪು : ಇಲ್ಲಿ Xನ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ ಹೀಗೆ ಇದೆ.

x :	1	0
p_x :	p	$(1-p)$

ಆದುದರಿಂದ, $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$.

ಉದಾಹರಣೆ 2 : ಒಂದು ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳದ ಬದಿಗಳ ಮೇಲೆ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಎಂಬ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ತೂರಿದಾಗ ಮೇಲುಗಡೆ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಅಂಕವನ್ನು X ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, $E(X)$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಡಪು : ದಾಳವು ಸಾಚಾ ದಾಳವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು x ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ, ಅದರ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು:

$X = x$:	1	2	3	4	5	6
$p_x = P(X=x)$:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

ಆದುದರಿಂದ, $E(X) = \Sigma x p_x = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3\cdot5$

ದಾಳವು ಕುಟಿಲ ದಾಳವಾಗಿದ್ದರೆ, ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ ಇದಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದಂತಿರಲಿ.

$X = x$:	1	2	3	4	5	6
$p_x = P(X=x)$:	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ, $E(X) = 1\cdot\frac{2}{10} + 2\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{10} + 5\cdot\frac{2}{10} + 6\cdot\frac{3}{10}$

$$= \frac{39}{10} = 3\cdot9$$

ಸಾಚಾ ದಾಳವಾಗಿದ್ದರೆ $E(X) = 3\cdot5$ ಮತ್ತು ಈ ಕುಟಿಲ ದಾಳಕ್ಕೆ $E(X) = 3\cdot9$. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : ರಾಮಪ್ಪನು ಒಂದು ಸಾಚಾ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ತೂರುತ್ತಾನೆ. ತಲೆ ಮೇಲೆ ಬಂದರೆ ಅವನಿಗೆ 2 ರೂಪಾಯಿಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ, ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿ ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಡಪು : ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಸಂವಾದಿ ಸಂಭವತೆಗಳನ್ನೂ ಹೀಗೆ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದು:

x	2	−1
p_x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ಬಾಲ ಮೇಲೆ ಬಂದರೆ 1 ರೂಪಾಯಿ ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಲಗತ್ತಿಸಿದ್ದೇವೆ.

$\therefore E(X) = 2\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ $= \frac{1}{2}$ ರೂಪಾಯಿ.

7 ಲಾಟರಿಯ ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳು

ಈಗ ರಾಜ್ಯಸರಕಾರಗಳು ನಡೆಸುತ್ತಿರುವ ಲಾಟರಿಗಳಿಂದ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ಒಂದು ಲಾಟರಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಕ್ಷ ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳಿರುವುವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಒಂದನೇ ಬಹುಮಾನ ರೂ. 10,000; ಎರಡನೇ ಬಹುಮಾನ ರೂ. 5,000; ಮೂರನೇ ಬಹುಮಾನ ರೂ. 1,000. ಅಲ್ಲದೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಮಾನ ರೂ. 500ಯಿನ ಐದು ನಾಲ್ಕನೇ ಬಹುಮಾನಗಳು ಎಂದಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಟಿಕೆಟ್ಟಿನ ಮೂಲ್ಯದ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಎಷ್ಟಿರುವುದು.

ಒಂದು ಟಿಕೆಟ್ಟಿನ ಮೂಲ್ಯ X ರೂಪಾಯಿ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ X ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಭವ ಚರವಾಗುವುದು. ಇದು 10,000, 5,000, 1,000, 500 ಮತ್ತು 0 → ಎಂಬ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತಾಳುವುದು. ಬಹುಮಾನ ಪಡೆದ ಟಿಕೆಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆರಿಸಲಾಗುತ್ತೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಇವಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಸಂಭವತೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

j	Xನ ಬೆಲೆ $= x_j$	ಸಂಭವತೆ $= p_j$	$x_j p_j$
1	ರೂ. 10,000	1/1,00,000	10,000/1,00,000
2	ರೂ. 5,000	1/1,00,000	5,000/1,00,000
3	ರೂ. 1,000	1/1,00,000	1,000/1,00,000
4	ರೂ. 500	5/1,00,000	2,500/1,00,000
5	ರೂ. 0	97,992/1,00,000	0

ಆದುದರಿಂದ $E(X) = \Sigma x_j p_j = 18{,}500/1{,}00{,}000$

ಅಂದರೆ, $E(X) = 18{\cdot}5$ ನಯಾ ಪೈಸಾ.

ಇದನ್ನು ಪ್ರತಿ ಟಿಕೆಟ್ಟಿನ "ನ್ಯಾಯ ಬೆಲೆ" ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

8 ನಿರೀಕ್ಷೆಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು (Properties of Expectation)

ಸಂಭವತೆಯು Xನ ವಿತರಣೆಯ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಆದಕಾರಣ, Xನ ನಿರೀಕ್ಷೆಯು ಚಲಕದ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮಕ್ಕೆ (mean) ಸಮ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ನಿರೀಕ್ಷೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

1. $E(C) = C$ . . . (8·1)

ಇಲ್ಲಿ C ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ರಾಶಿ (constant). ಇದನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭವ ಚರವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. $P(X=C)=1$ ಇರುವುದು. ಮತ್ತೆ $P(X=C')=0$. ಇಲ್ಲಿ C^1 ಎಂಬುದು Cನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆ ಇರಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ

Cಯ ನಿರೀಕ್ಷೆ$=C\cdot 1=C$.

$$2.\quad E(X+Y)=E(X)+E(Y). \qquad \cdots (8\cdot 2)$$

X ಸಂಭವ ಚರವು $x_1, x_2 \cdots, x_m$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು $p_1, p_2 \cdots p_m$ ಸಂಭವತೆಗಳೊಡನೆ ಹೊಂದಲಿ; ಮತ್ತು Y ಸಂಭವ ಚರವು $y_1, y_2 2 \cdots y_n$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು $p'_1, p'_2 \cdots p'_n$ ಸಂಭವತೆಗಳೊಡನೆ ಹೊಂದಲಿ. $(X+Y)$ ಸಂಭವ ಚರವು x_i+yj ಎಂಬ mn ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದ ಬಲ್ಲುದು; ಏಕೆಂದರೆ, Xನ ಪ್ರತಿ x_i ಬೆಲೆಯೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ Yನ n ಬೆಲೆಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾದ ಈ n ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ X ಸಂಭವ ಚಲಕವು x_i ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ $X=x_i$, ಮತ್ತು $Y=y_j$ ಆಗುವುದರ ಸಂಭವತೆ p_{ij} ಇರಲಿ.

ಈಗ $\sum_j p_{ij}=P(X=x_i\,;Y=y_1)+\cdots$

$$+P(X=x_i\,;\,Y=y_n)=P(X=x_i)=p_i.$$

ಇದೇ ರೀತಿ $\sum_i p_{ij}=p'_j$.

ಆಗ $E(X+Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i+y_j)$

$$=\sum_i\sum_j p_{ij}\,x_i+\sum_i\sum_j p_{ij}\,y_j$$

$$=\sum_i p_i x_i+\sum_j p'_j y_j=\overline{X}+\overline{Y}$$

ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ಯೋಗದ ನಿರೀಕ್ಷೆಯು ಆ ಚಲಕಗಳ ನಿರೀಕ್ಷೆಗಳ ಯೋಗಕ್ಕೆ ಸಮ. ಇದನ್ನು 3 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಚಲಕಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$

$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n) \quad \cdots (8\cdot3)$$

3. $E(CX) = C\cdot E(X) = C\bar{X}$. (ಇಲ್ಲಿ C = ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ). ಹೇಗೆಂದರೆ

$$E(CX) = \Sigma(Cx_j p_j) = C\Sigma x_j p_j = C\cdot E(X) = C\bar{X}.$$

4. X, Y ಎರಡು ಸ್ವತಂತ್ರ ಸಂಭವ ಚರಗಳಾದರೆ

$$E(XY) = E(X)\cdot E(Y) \quad \cdots (8\cdot4)$$

XY ಗುಣಕವು $x_i y_j$ $(i=1, 2, \ldots m; j = 1, 2, \ldots n)$ ಎಂಬ mn ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಸಂವಾದಿ ಸಂಭವತೆ $p_i p'_j$ ಇರುವುದು. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಮೇರೆಗೆ,

$$E(XY) = \sum_i \sum_j p_i p'_j x_i y_j$$

$$\sum_i \sum_j p_i x_i p_j' y_j = \sum_i p_i x_i \left(\sum_j p'_j y_u\right)$$

$$= \Sigma p_i x_i E(Y) = E(Y)\Sigma p_i x_i$$

$$= E(X)\cdot E(Y) = \bar{X}\bar{Y}$$

ಇಂತು, ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಚಲಕಗಳ ಗುಣಕದ ನಿರೀಕ್ಷೆಯು ಅವುಗಳ ನಿರೀಕ್ಷೆಗಳ ಗುಣಕಕ್ಕೆ ಸಮ.

9 ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಚಲಕದ ನಿರೀಕ್ಷೆ

X ಸಂಭವ ಚಲಕವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಅನುಕಲದ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ x ಮತ್ತು $x+dx$ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸಂಭವ ಸಾಂದ್ರತೆ $f(x)$ ಇದ್ದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \quad \cdots (9\cdot1)$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಈ ಅನುಕಲದ ಅಸ್ತಿತ್ವವು ಇದ್ದ ಹೊರತು ಈ ಸಾಮ್ಯವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಚಲಕವು 0 ಮತ್ತು 1 ಈ ಗಡಿಗಳ ನಡುವೆ ಇದ್ದು ಸಂಭವ ಸಾಂದ್ರತೆ ಏಕಸಮವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಮಧ್ಯಮ (**mean**) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಡಪು: ಸಂಭವ ಸಾಂದ್ರತೆ ಏಕಸಮವಾದುದರಿಂದ x ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸಾಂದ್ರತೆ ಬದಲಾಗದೆ ಇರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು k ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

$$f(x) = k \qquad 0 \leq x \leq 2 \qquad \cdots (9{\cdot}2)$$

ಈ ಗಡಿಗಳ ಹೊರಗಡೆ ಇರುವ x ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $f(x) = 0$ ಇರುವುದು. ಒಟ್ಟು ಸಂಭವತೆ

$$= \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 k\, dx = kx \Big]_0^2 = 2k \qquad \cdots (9{\cdot}3)$$

ಆದರೆ ಒಟ್ಟು ಸಂಭವತೆ 1 ಇರಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ $2k=1$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಸಂಭವ ಸಾಂದ್ರತೆ $f(x) = \frac{1}{2}$ ಆಗುವುದು.

$$\text{ಮಧ್ಯಮ} = X \text{ ನ ನಿರೀಕ್ಷೆ} = \int_0^2 \frac{1}{2}\, x\, dx = \frac{x^2}{4}\Big]_0^2 = 1$$

$\therefore$ ದತ್ತ ಚಲಕದ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮ $= 1$.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಒಂದು ಸಂಭವ ಚಲಕವು 0 ಮತ್ತು 2 ಈ ಗಡಿಗಳ ನಡುವೆ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸಾಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತೆ.

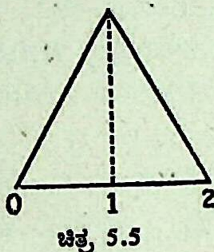
$$f(x) = x, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = 2 - x, \qquad 1 \leq x \leq 2$$

ವಿತರಣೆಯ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗುಪ್ತ ಸಾಮ್ರಾಟರು ಬೌದ್ಧಮತ, ಜೈನಮತ ಮುಂತಾದ ಎಲ್ಲಾ ಧರ್ಮಗಳಿಗೂ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹ ಕೊಡುತ್ತಿದ್ದರು. ಸಾಂಚಿ ಮತ್ತು ಸಾರನಾಥ ಬೌದ್ಧಮತದ ಮುಖ್ಯ

ಒಡಮ : ಇದರ ಆಲೇಖ ತ್ರಿಕೋನಾಕಾರವಾಗಿರುವುದು (ಚಿತ್ರ 5.5).



ಚಿತ್ರ 5.5

$$\text{ಒಟ್ಟು ಸಂಭವತೆ} = \int_0^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2 - x)dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + \Big[2x - \frac{x^2}{2}\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + \left(2 - \frac{3}{2}\right) = 1; \quad \text{ತಾಳೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ.}$$

X ನ ನಿರೀಕ್ಷಣೆಯನ್ನು μ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಿ; ಆಗ

$$\mu = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 x(2 - x)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 + \Big[x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

$\therefore$ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮ = 1.

ಈ ವಿತರಣೆಯ ಸಂಮಿತಿ (symmetry) ಯಿಂದ ಈ ಫಲವನ್ನು ನಿಗಮನ ಮಾಡಬಹುದು.

10 ವಿಚಲನೆ (Variance)

X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ನಿರೀಕ್ಷೆ m ಇರಲಿ; $E(x - m)^2$ನ್ನು X ಚಲಕದ ವಿಚಲನೆ (variance) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು Var (X) ಅಥವಾ V(X) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ V$(X) = E(X - m)^2$. ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲಕ್ಕೆ ಮಾನಕ

ವ್ಯತಿಕಲನ ಅಥವಾ ಮಾನಕ ಸರಿತ (standard deviation) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು σ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಿದರೆ $\text{Var}(X) = \sigma^2$. X ನ ವಿತರಣೆಯ ಚದರಾವಣೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ $V(X)$ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವುದು. $(X-m)$ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಧನವಾಗಿಯೂ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಋಣವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದು, ಮತ್ತು $E(X-m) = 0$ ಆಗುವುದು. ಇದರ ವರ್ಗವು, ಅಂದರೆ $(X-m)^2$ ಯಾವಾಗಲೂ ಧನವಾಗಿಯೇ ಇರುವುದು, $X = m$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ 0 ಆಗುವುದು. ಇದರ ನಿರೀಕ್ಷೆಯು ಅರ್ಥಾತ್ ವಿಚಲನೆಯು ಧನವಾಗಿಯೇ ಇರುವುದು. ಈಗ $(X-m)^2$ ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ $X^2 - 2Xm + m^2$ ದೊರೆಯುವುದು.

$$\therefore E(X-m)^2 = E(X^2) - 2m\,E(X) + m^2$$

$$= E(X^2) - 2m \cdot m + m^2 = E(X^2) - m^2$$

ಎಂದರೆ, $\text{Var}(X) = E(X^2) - m^2 \qquad \cdots \quad (10\cdot1)$

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವಿಕೆ: ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ತಲೆ ಮೇಲುಗಡೆಯಾಗಿ ಬಿದ್ದರೆ, X ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಬೆಲೆ 1 ಎಂತಲೂ, ಬಾಲ ಮೇಲುಗಡೆಯಾಗಿ ಬಿದ್ದರೆ 0 ಎಂತಲೂ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಆಗ $P(X=1) = P(X=0) = \frac{1}{2}$.

$$\therefore E(X) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

ಹಾಗೂ $V(X) = E(X - \frac{1}{2})^2$.

$X - \frac{1}{2}$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಸಂಭವತೆಯನ್ನೂ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

X	$X-\frac{1}{2}$	ಸಂಭವತೆ	$(X-\frac{1}{2})^2$ × ಸಂಭವತೆ.
1	1/2	1/2	1/4 · 1/2 = 1/8
0	- 1/2	1/2	1/4 · 1/2 = 1/8

$$\therefore E(X - \tfrac{1}{2})^2 = 1/8 + 1/8 = 1/4.$$

ಮಾರ್ಗಾಂತರದಿಂದ $V(X) = E(X^2) - m^2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ X ನ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$E(X^2) = 1/2 \cdot (1)^2 + 1/2 \cdot (0)^2 = 1/2.$$

$$\therefore V(X) = 1/2 - (1/2)^2 = 1/4.$$

ಹೀಗೆಯೇ $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = (1 - p) = q$ ಇದ್ದಾಗ,

$$m = E(X) = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p;$$

ಮತ್ತು $E(X^2) = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p.$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - m^2 = p - p^2 = pq.$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{pq}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 1:

X ಸಂಭವ ಚಲಕವು $0, 1, 2, \ldots, n$ ಎಂಬ $(n + 1)$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಮಸಂಭವನತೆಯಿಂದ ತಳೆಯುತ್ತದೆ. ಅದರ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನೂ ವಿಚಲನೆಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಡಪು : ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಯ ಸಂಭವತೆ $= 1/(n + 1)$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ, ಏಕೆಂದರೆ ಎಲ್ಲ ಸಂಭವತೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ

$$\text{ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ} = \frac{1}{n+1}(0 + 1 + 2 + \cdots + n)$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}.$$

$$\text{ಹಾಗೂ ವಿಚಲನೆ} = \frac{1}{n+1}(0^2 + 1^2 + \cdots + n^2) - (n/2)^2$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4}$$

$$= \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2 + 2n}{12}$$

ಉದಾಹರಣೆ 2:

ಮೇಲೆ 9ನೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ 2ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯ ಸಂಭವ ಚಲಕದ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಡಪು: ಸಂಭವ ಚಲಕದ ನಿರೀಕ್ಷೆ $m = 1$ ಎಂದು ಆಗಲೆ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ

ವಿಚಲನೆ $= E[(X-m)^2] = E(X-1)^2$

$$= \int_0^2 (x-1)^2 f(x)dx$$

$$\int_0^1 (x-1)^2 x dx + \int_1^2 (x-1)^2 (2-x)\, dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx + \int_1^2 (-x^3 + 4x^2 - 5x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

ವಿಚಲನೆ $= \sigma^2 = 1/6$.

ಇದನ್ನು ಮಾರ್ಗಾಂತರದಿಂದ 10·1ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ ಹೀಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2(2-x)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4} + \left[\frac{14}{3} - \frac{15}{4}\right] = 1\tfrac{1}{6}$$

$\therefore$ ವಿಚಲನೆ $= E(X^2) - [E(X)]^2 = 1\tfrac{1}{6} - 1 = \tfrac{1}{6}$.

ಸೂಚನೆ: ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವಲ್ಲಿ X ಸಂಭವ ಚರದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗ ಮಾಡಿ ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ವಿಚಲನೆಯ ಆಯಾಮ (dimension) 2 ಆಗುವುದು. X ಸಂಭವ ಚರದ x_1, x_2, . . . ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೆಂಟಿಮೀಟರುಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ, x_1^2, x_2^2 . . . ಬೆಲೆಗಳು ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರುಗಳಾಗುವುವು. ಆದಕಾರಣ ಚದರಾವಣೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸುವಾಗ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಸೂಕ್ತವಲ್ಲ. ವಿಚಲನೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಇಳಿಸಿದರೆ ಅದು ಆಯಾಮದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ X ನ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆಯೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಲು ಸಂಗತವಾಗಿರುವುದು.

11 ವಿಚಲನೆಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

1. ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ರಾಶಿಯ ವಿಚಲನೆ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವುದು. ದತ್ತ ಸ್ಥಿರ ರಾಶಿ c ಇರಲಿ. ಇದನ್ನು ಏಕ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳ ಸಂಭವ ಚರವನ್ನಾಗಿ ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$P(x = c) = 1$, $P(x = c') = 0$; ಇಲ್ಲಿ $c' \neq c$; ನೋಡಿ ಪ್ರಕರಣ 8(1)

ಆಗ $E(X) = c$; ಆದುದರಿಂದ $X - E(X) = c - c = 0$.

$$\therefore E[X - E(X)]^2 = 0.$$

2. b ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರರಾಶಿಯಾದರೆ,

$$V(X + b) = V(X) \qquad \ldots \quad (11.1)$$

ಹೇಗೆಂದರೆ, $E(X) = m$ ಇರಲಿ. ಆಗ

$$E(X + b) = E(X) + b = m + b$$

$$\therefore (X + b) - E(X + b) = X + b - (m + b) = x - m.$$

$$\therefore V(X + b) = E(X - m)^2 = V(X)$$

3. c ಒಂದು ಸ್ಥಿರರಾಶಿಯಾದರೆ,

$$V(cX) = c^2 V(X). \qquad (11.2)$$

ಈಗ
$$V(cX) = E[(cX) - E(cX)]^2$$
$$= E(cX - cm)^2 = E[c^2(X - m)^2]$$
$$= c^2 E(X - m)^2 = c^2 V(X).$$

ಎಂದರೆ, $V(cX) = c^2 V(X)$

4. X_1, X_2, ಎರಡು ಸಂಭವನ ಚಲಕಗಳಿರಲಿ; ಇವುಗಳ ನಿರೀಕ್ಷೆಗಳು m_1, m_2 ಇರಲಿ, ಮತ್ತು ವಿಚಲನೆಗಳು σ_1^2, σ_2^2 ಇರಲಿ. ಅಂದರೆ, $E(X_1) = m_1$, $E(X_2) = m_2$; $V(X_1) = \sigma_1^2$, $V(X_2) = \sigma_2^2$. ಆಗ

$$V(X_1 + X_2) = E[(X_1 + X_2) - E(X_1 + X_2)]^2$$
$$= E[(X_1 - m_1) + (X_2 - m_2)]^2$$
$$= E[(X_1 - m_1)^2 + (X_2 - m_2)^2 + 2(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]$$
$$= V(X_1) + V(X_2) + 2\,E(X_1 - m_1)(X_2 - m_2).$$

$E(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)$ ಎಂಬ ಪದಕ್ಕೆ X_1, X_2 ಸಂಭವನ ಚಲಕಗಳ (covariance) ಸಹವಿಚಲನೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು Cov (X_1, X_2) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು σ_{12} ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ,

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\,\text{Cov}(X_1, X_2)$$
$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12} \quad \cdots (11.3)$$

ದತ್ತ ಚಲಕಗಳು X_1, X_2 ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದ್ದಾಗ,

$$E(X_1 - m_1)(X_2 - m_2) = E(X_1 - m_1)E(X_2 - m_2)$$

ಆದರೆ, $E(X_1 - m_1) = 0$ ಮತ್ತು $E(X_2 - m_2) = 0$

$$\therefore \text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 - m_1)(X_2 - m_2) = 0.$$

ಆದುದರಿಂದ X_1, X_2 ಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರ ಸಂಭವ ಚರಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ,

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad \ldots (11.4)$$

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಬಹುದು. $X_1, X_2, \ldots X_n$ ಎಂಬ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ n ಸಂಭವ ಚಲಕಗಳಿದ್ದರೆ

$$V(X_1 + X_2 \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$
$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 \quad \ldots (11.5)$$

ಇದರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನಿಗಮನ ಮಾಡಬಹುದು. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ಇವುಗಳ ವಿತರಣೆಗಳು ಒಂದೇಯಾಗಿರಲಿ ; ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಮ $= m$, ಮತ್ತು ವಿಚಲನೆ $= \sigma^2$. ಅಂದರೆ, $X_1, X_2, \ldots X_n$ ಗಳನ್ನು ಒಂದು ಮೂಲ ವಿಶ್ವದಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆಮಾಡಲಾದ ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಎನ್ನಬಹುದು. ಈ ಪ್ರತಿದರ್ಶದ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು $\overline{X}$ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಿದರೆ,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots X_n) \qquad \ldots\ldots \quad (11{\cdot}6)$$

ಆಗುವುದು. ಆಗ $\overline{X}$ ಒಂದು ಸಂಭವ ಚಲಕವಾಗುವುದು. ಅದರ ವಿತರಣೆ ಏನೆಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯದು. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಅದರ ಮಧ್ಯಮ ಮತ್ತು ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n}(m + m + \ldots m) = m.$$

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \qquad \cdots \quad (11{\cdot}7)$$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1 ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರನು ಒಂದು ಸಾಚಾ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ತೂರುತ್ತಾನೆ. ತಲೆ ಮೇಲೆ ಬಂದರೆ ಅವನಿಗೆ 4 ರೂಪಾಯಿಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ, ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿ ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಉತ್ತರ: $1\frac{1}{2}$ ರೂಪಾಯಿ)

2. ಒಬ್ಬ ಜೂಜಾಟಗಾರನು ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳವನ್ನು ತೂರುತ್ತಾನೆ. ಗರ 4, 5 ಅಥವಾ 6 ಬಿದ್ದರೆ ಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಅವನಿಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತೆ. ಗರ 1, 2, 3 ಬಿದ್ದರೆ ಗರದ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಅವನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಎಷ್ಟು ? (ಉತ್ತರ ರೂ. 1–50)

3. ಒಬ್ಬ ಬಿ. ಎ. ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಕೂಡುತ್ತಾನೆ. ಒಂದೊಂದು ವಿಷಯದಲ್ಲೂ ಪ್ರಥಮ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತೀರ್ಣವಾಗುವ ಸಂಭವತೆ $\frac{1}{4}$ ಇರುವುದು. ಒಂದು ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಸ್ ಆದರೆ ಅವನಿಗೆ ರೂ.80 ಬಹುಮಾನ ದೊರೆಯುವುದು. ಎರಡು ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಸಾದರೆ, ರೂ. 200 ಪುರಸ್ಕಾರ ದೊರೆಯುವುದು. ಮೂರರಲ್ಲೂ ಪ್ರಥಮ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪಾಸಾದರೆ ರೂ. 400 ಪುರಸ್ಕಾರ ದೊರೆಯುವುದು. ಆತನ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಎಷ್ಟು ?

(ಉತ್ತರ ರೂ. 681.25)

4. ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಗಳ ಮಧ್ಯಮ ಮತ್ತು ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿರಿ.

(a)

x :	2	4	6	8	10	12	14
$f(x)$:	·13	·23	·24	·14	·10	·08	·08

(b)

x :	10	12	20	23	24
$f(x)$:	·05	·15	·40	·25	·15

5. ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ತಯಾರಾಗುವ ಸಾಮಾನುಗಳಲ್ಲಿ 0, 1, 2 ಊನವಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ ಇರುವುದು. ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಆ ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ತಯಾರಾಗುವ ಊನವಾದ ಸಾಮಾನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ವಿಚಲನೆಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6 ಆರು ಮುಖಗಳ ಒಂದು ಸಾಚಾ ದಾಳವನ್ನು ತೂರಿದಾಗ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನೂ ವಿಚಲನೆಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಆರು ಬದಿಗಳುಳ್ಳ ಎರಡು ಸಾಚಾ ದಾಳಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮುಖದ ಮೇಲೂ 1 ರಿಂದ 6ರವರೆಗೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ತೂರಿದಾಗ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು X ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, Xನ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೂ Xನ ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆಯನ್ನೂ ವಿಚಲನೆಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 6

ಕೆಲವು ಪ್ರಧಾನ ವಿತರಣೆಗಳು
(Some Standard Distributions)

1 ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುವ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ವಿತರಣೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಈಗ ವಿವೇಚಿಸೋಣ. ಮೂರು ಪ್ರಧಾನ ವಿತರಣೆಗಳು (standard distributions) ಹಿರಿಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ— ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ, ಪೋಸಾಂ (Poisson) ವಿತರಣೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ.

2 ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ (Binomial distribution)

ಈ ವಿತರಣೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮುಖ್ಯವಾದ ಅಂಶಗಳು ಮೂರು. ಅವು ಯಾವು ವೆಂದರೆ :

(a) ಪ್ರತಿ ಯತ್ನದಲ್ಲೂ (trial) ಎರಡೇ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಾಧ್ಯ. ಉದಾಹರಣೆ : ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ತಲೆ ಅಥವಾ ಬಾಲ ಮೇಲುಗಡೆ ಯಾಗಿ ಬೀಳುವುದು.

(b) ಯತ್ನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿರುವುವು. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಯತ್ನದ ಫಲಿತಾಂಶದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಯತ್ನದ ಫಲಿತಾಂಶ ಯಾವ ಪರಿಣಾಮವನ್ನೂ ಬೀರು ವುದಿಲ್ಲ.

(c) ಪ್ರತಿ ಯತ್ನದಲ್ಲೂ ಜಯದ ಸಂಭವತೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗದೆ ಒಂದೇ ಬೆಲೆ ಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ, ಯತ್ನ ಯತ್ನಕ್ಕೂ ಈ ಸಂಭವತೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಒಂದೇ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಯತ್ನಗಳಿಗೆ (Bernoulli trials) ಬರ್ನೌಲಿ ಯತ್ನಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಲಭಿಸುವ ವಿತರಣೆಗೆ ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಒಂದು ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳವನ್ನು (6 ಬದಿಗಳುಳ್ಳದ್ದು) ತೂರಿದಾಗ 6 ವಿವಿಧ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಾಧ್ಯ ; ಆದುದರಿಂದ ಇದು ಬರ್ನೌಲಿ ಯತ್ನವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಗರ 5 ಅಥವಾ 6 ಬಿದ್ದರೆ ಜಯ ಎಂದೂ, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅಪಜಯ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸುವ

ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಯತ್ನದ ಫಲಿತಾಂಶ ಜಯ ಅಥವಾ ಅಪಜಯ ಎಂದು ಎರಡೇ ಎರಡು ಬಗೆ ಯಾಗುವುದು. ದಾಳವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ತೂರಿದಾಗ (b) ಮತ್ತು (c) ನಿಯಮ ಗಳೂ ಪಾಲಿತವಾಗುತ್ತವೆ, ಆದುದರಿಂದ ಇದು ಬರ್ನೌಲಿ ಯತ್ನವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯ. ಒಂದು ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ತಯಾರಾಗುವ ಸಾಮಾನು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿರಬಹುದು, ಅಥವಾ ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿರಬಹುದು; ಉಳಿದ 2 ನಿಯಮಗಳೂ ಪಾಲಿತವಾದರೆ ಇದನ್ನು ಬರ್ನೌಲಿ ಯತ್ನದ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನಾಗಿ ಭಾವಿಸಬಹುದು.

3 ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ರೂಪ

ಬರ್ನೌಲಿ ಯತ್ನದಲ್ಲಿ ಜಯವಾಗುವ ಸಂಭವತೆ p ಎಂತಲೂ ಅಪಜಯವಾಗುವ ಸಂಭವತೆ $q=1-p$ ಎಂತಲೂ ಇರಲಿ. ಜಯವನ್ನು S ಎಂತಲೂ ಅಪಜಯವನ್ನು F ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ $P(S)=p$; $P(F)=q$ ಇರುವುವು. ಈ ಯತ್ನ ವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ನಡೆಸಿದರೆ $2^2=4$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಾಧ್ಯ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ FF, FS, SF, SS. ಇವಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಇವುಗಳ ಸಂಭವತೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ q^2, qp, pq, p^2 ಇರುವುದು. ಈ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಗಳಿಸುವ ಜಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು X ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸೋಣ. ಆಗ X ಎಂಬ ಈ ಸಂಭವ ಚಲಕವು 0, 1, 2 ಎಂಬ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತಳೆಯಬಲ್ಲುದು. ಇವುಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳು q^2, $2pq$, p^2 ಇರುವುವು. ಇಲ್ಲಿ FS ಮತ್ತು SF ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಹಚ್ಚುವ ಸಂಭವತೆ pq ಇರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ ಮೂರು ಬಾರಿ ಈ ಯತ್ನವನ್ನು ನಡೆಸಿದಾಗ, $2^3=8$ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಳು ಸಾಧ್ಯ; ಇವಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ 8 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯು ವುವು. ಇದರಲ್ಲಿನ ಜಯಗಳ ಬೆಲೆ 0, 1, 2, 3 ಆಗಬಹುದು. ಇವುಗಳ ಸಂಭವತೆ ಯನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಫಲಿತಾಂಶ : ಘಟನೆ	ಸಂಭವತೆ	ಜಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
FFF	q^3	0
FFS, FSF, SFF	q^2p, q^2p, q^2p	1
FSS, SFS, SSF	qp^2, qp^2, qp^2	2
SSS	p^3	3

ಇದರಿಂದಾಗಿ $P(X=0) = q^3$; $P(X=1) = 3q^2p$;

$P(X=2) = 3qp^2$; $P(x=3) = p^3$. ಅಂದರೆ $(q+p)^3$ ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಲು ದೊರೆವ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳು 0, 1, 2, 3 ಜಯಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೀಡುವುವು.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಬಹುದು. ಒಟ್ಟು n ಯತ್ನಗಳಿದ್ದರೆ ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ r ಜಯಗಳೂ $(n-r)$ ಅಪಜಯಗಳೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಲಭಿಸುವ ಸಂಭವತೆ $p^r q^{n-r}$ ಇರುವುದು. ಅನುಕ್ರಮವಾದ n ಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ ಜಯಗಳಿಸುವ r ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು $\binom{n}{r}$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ r ಜಯಗಳೂ $(n-r)$ ಅಪಜಯಗಳೂ ಇರುವುವು; ಮತ್ತು ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ $p^r q^{n-r}$ ಆಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ r ಜಯಗಳು ದೊರೆವ ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತೆ $= \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ ಇರುವುದು; ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿ ಯತ್ನದಲ್ಲೂ ಜಯ ಒದಗುವ ಸ್ಥಿರ ಸಂಭವತೆ p ಇದ್ದು, ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಇಂಥ n ಯತ್ನಗಳ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಡೆಸಿದಾಗ $0, 1, 2, \ldots, n$ ಜಯಗಳು ಲಭಿಸುವ ಸಂಭವತೆಗಳು ಕೆಳಕಂಡ ದ್ವಿಪದಿ ವಿಸ್ತರಣದ ಪದಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮವಿರುತ್ತವೆ.

$$(q+p)^n = q^n + nq^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}q^{n-3}p^3 + \cdots + nqp^{n-1} + p^n$$

ಹೀಗೆ ಪಡೆದ ಜಯಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವ ಸಂಭವ ಚಲಕದ ವಿತರಣೆಗೆ ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ (binomial distribution) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದರಲ್ಲಿ ಚಲಕವು $0,1,2, \ldots, n$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು q^n, $nq^{n-1}p, \ldots, p^n$ ಎಂಬ ಸಂಭವತೆಗಳೊಡನೆ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವ ಇಂಥ ಸಂಭವ ಚಲಕಕ್ಕೆ ದ್ವಿಪದ ಸಂಭವ ಚಲಕ ಅಥವಾ ದ್ವಿಪದ ಸಂಭವ ವಿವರ್ತ (binomial variate) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ದ್ವಿಪದ ಸಂಭವ ಚಲಕದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವಲ್ಲಿ n ಮತ್ತು p ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ತಿಳಿದಿರಬೇಕು. ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ಪರಾಮಿತಿ (parameters) ಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು. ದ್ವಿಪದ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಯನ್ನು $b(x; n, p)$ ಎಂದು ಬರೆಯುು

ತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೆ ಬರೆದಾಗ $b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ ಎಂಬುದು $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳು ಎಂದು ತಿಳಿಯತಕ್ಕದ್ದು.

4 ದ್ವಿಪದ ಸಂಭವ ಚಲಕದ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಮತ್ತು ವಿಚಲನೆ

(Expected Value and Variance of the Binomial Variate)

ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದ n ಯತ್ನಗಳ ಪೈಕಿ j ನೆಯ ಯತ್ನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ($j = 1, 2, \cdots n$) ಈ ಯತ್ನದಲ್ಲಿನ ಜಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು X_j ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸೋಣ. ಆಗ $P(X_j = 1) = p$, $P(X_j = 0) = q$, $\therefore E(X_j) = p$; $V(X_j) = pq$ (ಅಧ್ಯಾಯ 5, ಪ್ರಕರಣ 10 ನೋಡಿ).

n ಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ ದೊರೆವ ಜಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ r ಆದರೆ,

$$r = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

ಇಲ್ಲಿ X_j ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಸಂಭವ ಚಲಕಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು. 5ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದ 8.3 ಮತ್ತು 11.5ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಫಲಗಳನ್ನು ಈಗ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

$$\therefore \; E(r) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$
$$= p + p + \cdots + p = np.$$

ಹಾಗೂ
$$V(r) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$
$$= pq + pq + \cdots + pq \quad = npq$$

$$\therefore \quad \sigma^2 = npq \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \sigma = \sqrt{(npq)}.$$

5 ಜಯಗಳ ಅನುಪಾತ

ಒಟ್ಟು n ಬರ್ನೌಲಿ ಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು r ಜಯಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದರೆ, ಹಾಗೆ ಗಳಿಸಿದ ಜಯಗಳ ಅನುಪಾತ r/n ಆಗುವುದು. ಇದು ಒಂದು ಸಂಭವ ಚಲಕವಾಗುವುದು.

ಇದನ್ನು R ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಿದರೆ

$$E(R) = E(r/n) = \frac{1}{n} E(r) = \frac{1}{n} \cdot np = p.$$

ಹಾಗೂ $$V(R) = V(r/n) = \frac{1}{n^2} V(r) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n}$$

$\therefore$ R ಚಲಕದ ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ $=$ S.D. of $R = \sqrt{(pq/n)}$

6 ಅನ್ಯೋಪಪತ್ತಿ

ನಿರೀಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮ ಮತ್ತು ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ನಿಗಮನ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಾರಣ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೇರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಲೂ ಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 6·1

ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ: ಸಂಭವ ಕೋಷ್ಟಕ

x	$f =$ ಸಂಭವತೆ	xf	$x^2 f$
(1)	(2)	(3)	(4).
0	q^n	0	0
1	$nq^{n-1}p$	$nq^{n-1}p$	$nq^{n-1}p$
2	$\frac{1}{2}n(n-1)q^{n-2}p^2$	$n(n-1)q^{n-2}p^2$	$2n(n-1)q^{n-2}p^2$
⋮	⋮	⋮	⋮
j	$\binom{n}{j} q^{n-j}p^j$	$j\binom{n}{j} q^{n-j}p^j$	$j^2\binom{n}{j} q^{n-j}p^j$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	p^n	np^n	n^2p^n

ಇದು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಹೋಲುತ್ತದೆ.

ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ $\Sigma f = 1$ ಇರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ $E(X) = \mu' =$ ಮಧ್ಯಮ $= \Sigma xf =$ (3)ನೇ ಕಲಮಿನ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ. ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$\mu_1' = \Sigma xf = np[q^{n-1} + (n-1)q^{n-2}p + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)q^{n-3}p^2 + \cdots + p^{n-1}]$$
$$= np(q+p)^{n-1} = np, \quad (\because q + p = 1)$$

ಹಾಗೂ $\mu_2' = \Sigma x^2 f = np[q^{n-1} + 2(n-1)q^{n-2}p + 3\binom{n-1}{2}q^{n-3}p^2 + \cdots + np^{n-1}]$

$$= np[\{q^{n-1} + (n-1)q^{n-2}p + \frac{1}{2!}(n-1)(n-2)q^{n-2}p^2 + \cdots + p^{n-1}\}$$
$$+ (n-1)p\{q^{n-2} + (n-2)q^{n-2}p + \frac{1}{2!}(n-2)(n-3)q^{n-3}p^2 + \cdots + p^{n-2}\}]$$
$$= np[(q+p)^{n-1} + (n-1)p(q+p)^{n-2}]$$
$$= np[1 + (n-1)p] \quad (\because q+p=1)$$
$$\therefore \quad V(X) = \mu_2 = \mu_2' - {\mu'_1}^2$$
$$= np[1 + (n-1)p] - (np)^2$$
$$= np(1-p) = npq$$

ಇದರಿಂದ ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ $\sigma = \sqrt{(npq)}$

ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ n ಬರ್ನೌಲಿ ಯತ್ನಗಳಿದ್ದರೆ r ಜಯಗಳ ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇಂಥ N ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿದಲ್ಲಿ r ಜಯಗಳು ಘಟಿಸುವ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು $N\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$ ಇರುವುದು.

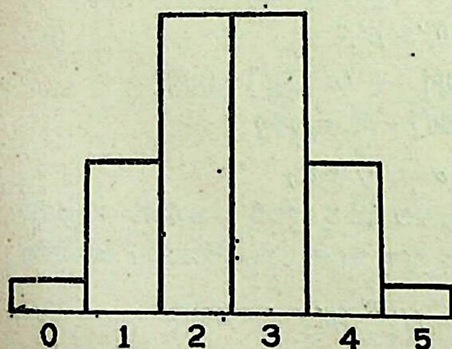
7 ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ಆಲೇಖ

ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ $p = \frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ Xನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳನ್ನೂ ಒಂದು (graph) ಆಲೇಖ (ನಕ್ಷೆ)ದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 6·2

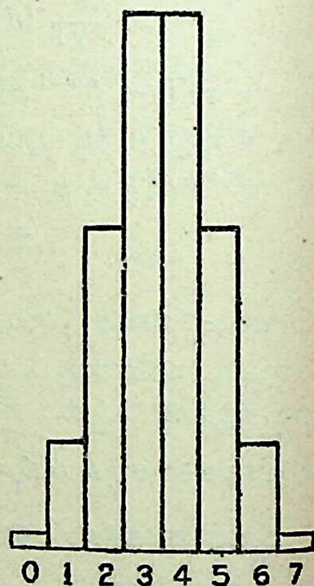
ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

x	$32b(x; 5, \frac{1}{2})$	$128b(x; 7, \frac{1}{2})$	$256b(x; 8, \frac{1}{2})$	$512b(x; 9, \frac{1}{2})$
0	1	1	1	1
1	5	7	8	9
2	10	21	28	36
3	10	35	56	84
4	5	35	70	126
5	1	21	56	126
6		7	28	84
7		1	8	36
8			1	9
9				1



$32\, b(x; 5, \frac{1}{2})$

ಚಿತ್ರ 6.1



$128\ b(x; 7, \frac{1}{2})$

ಚಿತ್ರ 6.2

ಚಿತ್ರ 6.3

$b(x; 50, \frac{1}{8})$ ಇದರ ಆಲೇಖವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಈ ಆಲೇಖಗಳು ಸಮ್ಮಿತ (Symmetric) ವಾಗಿರುವುವು. p ಯ ಬೆಲೆ $\frac{1}{2}$ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಮೆ ಇದ್ದಾಗಲೂ ಸಹ, n ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲಾ ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯು ಸಮ್ಮಿತ ರೂಪಕ್ಕೆ ಉಪಗಮಿಸುವುದು. ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಸ್ತರಣದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಗುಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಅಂಕಿಗಳು 1 ಎಂದಿರಬೇಕು. ಪ್ರತಿಸಾಲಿನಲ್ಲೂ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ನಡುವಣ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯತಕ್ಕದ್ದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 3ನೇ ಸಾಲನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಲು $1 + 3 = 4$ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದನ್ನು ಇವೆರಡು ಅಂಕಗಳ ನಡುವಣ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 4ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. ತರುವಾಯ, $3 + 3 = 6$ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಎರಡು 3ಗಳ ನಡುವೆ ಬರುವಂತೆ 4ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದೆ $3 + 1 = 4$ ಎಂಬುದನ್ನು 4ನೇ ಸಾಲಿನ ಮುಂದಿನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. ಈ ಸಾಲಿನ ಮೊದಲಲ್ಲೂ ಕೊನೆಯಲ್ಲೂ 1 ಎಂಬ ಅಂಕವನ್ನು ಇರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದಿನ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ತುಂಬುತ್ತ ಹೋಗಬಹುದು. ಈ ತೆರನಾದ ಸಂಖ್ಯಾ ವಿನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ (Pascal's triangle) ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್ ತ್ರಿಕೋನ ಎಂದು ಹೆಸರು.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

ಉದಾಹರಣೆ

ಒಂದು ಹತ್ತಿ ಗಿರಣಿಯಲ್ಲಿ ಶೇಕಡಾ 20ರಷ್ಟು ಕಾರ್ಮಿಕರು ಶ್ವಾಸಕೋಶ ರೋಗಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾಗಿರುವ ಸಂಭವವಿದೆ. 6 ಕಾರ್ಮಿಕರಲ್ಲಿ 4 ಕಾರ್ಮಿಕರು ಈ ರೋಗಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾಗುವ ಸಂಭವತಿ ಏನು?

ಒಡಪು : ಒಬ್ಬ ಕಾರ್ಮಿಕನು ಈ ರೋಗಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾಗುವ ಸಂಭವತಿಯನ್ನು p ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ $p = 20\% = \frac{1}{5}$. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಾರ್ಮಿಕರು ಈ ರೋಗಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾಗುವ ಸಂಭವತಿಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿರುವುವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. 6 ಕೆಲಸಗಾರರಲ್ಲಿ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ಮಂದಿ ಈ ರೋಗಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾಗುವ ಸಂಭವತಿ $(\frac{4}{5}+\frac{1}{5})^6$ ಎಂಬುದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳಾಗಿರುವುವು. ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಪದ $_6C_4(4/5)^2(1/5)^4 = 15 \times (4^2/5^6) = 48/3125$. ಆದುದರಿಂದ 6 ಕಾರ್ಮಿಕರಲ್ಲಿ ನಾಲ್ವರು ಈ ರೋಗಕ್ಕೆ ತುತ್ತಾಗುವ ಸಂಭವತಿ

$$= 48/3125 = 0{\cdot}01536.$$

8 ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆ (Poisson distribution)

ಒಂದು ಘಟನೆಯ ಸಂಭವತಿ ಅತ್ಯಲ್ಪವಿದ್ದಾಗ, ಆ ಘಟನೆಯನ್ನು ಅಸಾಮಾನ್ಯ ಘಟನೆ ಅಥವಾ ಅಪರೂಪ ಘಟನೆ (rare event) ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯತ್ನದಲ್ಲೂ ಜಯದ ಬೆಲೆ p ಅಲ್ಪವಾಗಿರಲಿ. ಯತ್ನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ದೊಡ್ಡದಾದಲ್ಲಿ $E(x) = np = m$ ಎಂಬುದು ಪರಿಮಿತ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿದ್ದರೆ, x ಜಯಗಳು ಆಗುವ ಸಂಭವತಿ $b(x; n, p)$, ಇದು

$$P(x, m) = e^{-m} \frac{m^x}{x!}$$

ಎಂಬ ಬೆಲೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಿರುವುದು. ಇಲ್ಲಿ $m = np$, ಮತ್ತು

$$e^m = 1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \cdots \infty.$$

ಈ ವಿತರಣೆಗೆ ಪೋಸಾಂ (Poisson) ವಿತರಣೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. X ಸಂಭವ ಚಲಕವು 0 ಮತ್ತು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಾಳಬಲ್ಲುದು.

ಸೂಚನೆ : ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ $1+m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \cdots$

ಎಂಬ ಅನಂತ ಶ್ರೇಣಿಗೆ (exponential series) ಘಾತೀಯ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದು m ನ ಎಲ್ಲ ನಿಜ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅಭಿಸರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತ ವನ್ನು e^m ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಕುರಿತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರೌಢ ಗಣಿತ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

X ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಅವಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಸಂಭವತೆಗಳನ್ನೂ ಕೋಷ್ಟಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 6·3
ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆ

X	f = (ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಂಭವತೆ)
0	e^{-m}
1	$e^{-m} \cdot m$
2	$e^{-m} \cdot m^2/2!$
3	$e^{-m} \cdot m^3/3!$
⋮	⋮
r	$e^{-m} \cdot m^r/r!$
⋮	⋮
ಮೊತ್ತ	1

ಸಂಭವತೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$$= e^{-m}[1 + m + m^2/2! + m^3/3! + m^4/4! + \cdots]$$

$$= e^{-m} \cdot e^m = 1.$$

ಒಂದು ವಿತರಣೆಯ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸಿದ ಸಂಭವತೆಗಳ ಅನುಪಾತ ದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ವಿತರಣೆಯನ್ನೂ ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ $p = m/n$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ, n ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅನಂತಕ್ಕೆ ಹೋಗ ಲಿತ್ತು, ಅದರಿಂದ ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮ ಮತ್ತು ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಪಡೆಯ ಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

ಮಧ್ಯಮ $= \lim np = m$; ಹಾಗೂ ವಿಚಲನೆ $= \lim \cdot npq = \lim \cdot mq = m$, ಏಕೆಂದರೆ $p \to 0$ ಆದಾಗ $q \to 1$.

ಅಂದರೆ ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮ $= m$ ಮತ್ತು ವಿಚಲನೆ $= m$. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಬಹುದು.

$$\text{ಮಧ್ಯಮ} = \mu_1' = 0 \cdot e^{-m} + 1 e^{-m} \cdot m + 2 \cdot e^{-m} \cdot \frac{m^2}{2!} + \cdots$$

$$= me^{-m}\left[0 + 1 + m + \frac{m^2}{2!} + \cdots\right]$$

$$= me^{-m} \cdot e^m = m.$$

ಹಾಗೂ
$$\mu_2' = 0^2 \cdot e^{-m} + 1^2 e^{-m} \cdot m + 2^2 e^{-m} \cdot \frac{m^2}{2!} + 3^2 \cdot e^{-m} \cdot \frac{m^3}{3!} + \cdots$$

$$= me^{-m}\left[1 + \frac{m}{2!}(2+2) + \frac{m^3}{3!}(3 \cdot 2+3) + \frac{m^3}{4!}(4 \cdot 3+4) + \cdots\right]$$

$$= me^{-m}[e^m + me^m] = m + m^2.$$

$$\therefore \mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$
$$= (m + m^2) - m^2 = m.$$

30 ವರುಷಗಳ ಕಾಲ ಪ್ರಷ್ಯ ನಾಡಿನ 10 ಅಶ್ವದಳಗಳಲ್ಲಿ ಕುದುರೆ ಒದೆತದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಜನ ಸತ್ತರು ಎಂಬ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಬೋರ್ಕಿವಿಟ್ಸ್ ಎಂಬಾತನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದನು. ಕುದುರೆಯ ಒದೆತದಿಂದ ಸಾವು ಸಂಭವಿಸುವುದು ವಿರಳ ಘಟನೆ ಆದುದರಿಂದ ಈ ಮಾಹಿತಿಗಳಿಂದ ದೊರೆತ ವಿತರಣೆಯು ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆಗೆ ಒಳ್ಳೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ ಉಳಿದಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 6·4
ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆ : ಬೋರ್ಕಿವಿಟ್ಸ್ ಕೋಷ್ಟಕ

ಪ್ರತಿದಳದಲ್ಲೂ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ಸಂಭವಿಸಿದ ಸಾವುಗಳು x	ಅವೇಕ್ಷಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ			ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿದ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ
	f	xf	x^2f	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	109	0	0	108·7
1	65	65	65	66·3
2	22	44	88	20·2
3	3	9	27	4·1
4	1	4	16	0·7
ಮೊತ್ತ	200	122	196	200·0

$$\therefore \text{ ಮಧ್ಯಮ } = \bar{x} = 122/100 = 0{\cdot}61$$

$$\text{ವಿಚಲನೆ } = \sigma^2 = (196/200) - (0{\cdot}61)^2$$
$$= 0{\cdot}98 - 0{\cdot}3721 = 0{\cdot}6079.$$

ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮ ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆಯ ಈ ಗುಣಧರ್ಮವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿದ ಹಾಗಾಯಿತು. $P(X=x) = e^{-m}.m^x/x!$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $\bar{x}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು mಗೆ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳ ಸಂಭವತೆಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಇವನ್ನು 5ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅವೇಕ್ಷಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ (2ನೇ ಕಲಂ) ಮತ್ತು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲಾದ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ (5ನೇ ಕಲಂ) ಹೆಚ್ಚುಕಡಿಮೆ ಸಮವಾಗಿರುವುವು. ಇದರಿಂದ ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆಯ ಪೊರ್ದಿಕೆ ಹಾಳಿತವಾಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯಾಗುವ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ 3% ರಷ್ಟು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿರುವುದು. 50 ವಸ್ತುಗಳ ಒಂದು ಪ್ರತಿಚಯದಲ್ಲಿ

(1) ಒಂದು ವಸ್ತು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆಯೇನು ?

(2) 1ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ದೋಷಯುಕ್ತವಾದ ವಸ್ತುಗಳಿಲ್ಲದಿರುವ ಸಂಭವತೆಯೇನು?

ಒಡಪು : ಇಲ್ಲಿ ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆ $= 0{\cdot}03 = p$. ಒಟ್ಟು $n = 50$ ವಸ್ತುಗಳ ಪ್ರತಿಚಯದಲ್ಲಿ ದೋಷಯುಕ್ತ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿರೀಕ್ಷೆ $= np = 50 \times 0{\cdot}03 = 1{\cdot}5$. ಸಂಭವತೆ p ಯ ಬೆಲೆ ಸಣ್ಣದಾಗಿರುವುದರಿಂದ ದೋಷಯುಕ್ತ ವಸ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿತರಣೆ ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆಯಂತಿರುವುದು. ಇದರ ಮಧ್ಯಮ $= m = 1{\cdot}5$. ಆದುದರಿಂದ ಇದರ ಸಂಭವವಿತರಣೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$e^{-1.5}\left(1 + \frac{1.5}{1} + \frac{1.5^2}{2!} + \frac{1.5^3}{3!} + \cdots\right)$$

ಈಗ $e^{-1.5} = 0{\cdot}2231$ (ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ; M. V. Jambunathan ; Mathematical Tables ನೋಡುವುದು.) ಆದುದರಿಂದ ಸಂಭವತೆಗಳನ್ನು ಸಾರಣಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ಬರೆಯಬಹುದು. 0·2231ನ್ನು ಬರೆದು ಮತ್ತು

ಇದನ್ನು 1.5 ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದ ಲಬ್ಧವನ್ನು ಇದರ ಕೆಳಗೆ ಕೋಷ್ಟಕದ 2ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಇದನ್ನು $\left(\frac{1\cdot5}{2}\right)$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಅದರ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು $\left(\frac{1\cdot5}{3}\right)$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಲು ಬಂದ 0·1254ನ್ನು ನಾಲ್ಕನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಇದನ್ನು $\left(\frac{1\cdot5}{4}\right)$ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಇದರ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು ಮತ್ತೆ$\left(\frac{1\cdot5}{5}\right)$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ 0·0141ನ್ನು ಇದರಡಿ ಬರೆಯಿರಿ. 6 ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 0·0049 ಬರೆದು 2ನೇ ಕಲಮಿನ ಮೊತ್ತ 1·0000 ಬರುವಂತೆ ಮಾಡಿರಿ.(2)ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಭವತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಉತ್ತರಗಳು ಕೋಷ್ಟಕದ 2ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 6·5
ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆಯ ಸಂಭವತೆಗಳು

ದೋಷಯುಕ್ತ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x	ಇದರ ಸಂಭವತೆ $f(x)$
(1)	(2)
0	0·2231
1	0·3346
2	0·2509
3	0·1254
4	0·0470
5	0·0141
≥ 6	0·0049
ಮೊತ್ತ	1·0000

50 ವಸ್ತುಗಳ ಒಂದು ನಿದರ್ಶನದಲ್ಲಿ,

1· ಒಂದು ವಸ್ತು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿರುವ ಸಂಭವತೆ : 0·3346

2· ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ದೋಷಯುಕ್ತವಾದ ವಸ್ತುಗಳು ಇಲ್ಲದಿರುವ ಅಂದರೆ 0 ಅಥವಾ 1 ದೋಷಯುಕ್ತ ವಸ್ತುವಿರುವ ಸಂಭವತೆ $= 0\cdot2231 + 0\cdot3346 = 0\cdot5577\cdot$

9 ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ (Normal distribution)

ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲೂ, ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲೂ ಸಂಭವ ಚಲಕ ವಿರತ ಅಥವಾ ವಿಚ್ಛಿನ್ನ (discrete) ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಚಲಕದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ನಿಗಮನ ಮಾಡಬಹುದು. ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ಸಂಭವ ಚಲಕ X ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆ r ಇರುವ ಸಂಭವತೆ $\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$ ಇರುವುದು ಮತ್ತು X ನ ಮಧ್ಯಮವು np ಇರುವುದು. ಈಗ $r = np + x$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಅಂದರೆ, ಮಧ್ಯಮದಿಂದ rನ ವ್ಯತಿಕಲನವನ್ನು ಅಥವಾ ಸರಿತವನ್ನು (deviation) x ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ

$$P(X = x) = \binom{n}{r}p^r q^{n-r} = \binom{n}{np+x}p^{x+np}q^{nq-x} \quad \cdots \quad (9{\cdot}1)$$

ಈಗ $n \to \infty$ ಆದಾಗ,

$$P(X = x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, exp\left(-\frac{x^2}{2npq}\right) \quad \cdots\cdot \quad (9{\cdot}2)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$pq = \sigma^2$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಇದನ್ನು ಈ ರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಸಬಹುದು :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}}\, exp(-x^2/2n\sigma^2)$$

ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಚಲಕವನ್ನು ಪಡೆಯಲು $x/\sqrt{n} = z$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ. xನ ಅಂತರವು 1 ಇರುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿ zನ ಅಂತರ $1/\sqrt{n}$ ಆಗುವುದು. n ಅನಂತಕ್ಕೆ ಉಪಸರಿಸಿದಾಗ ಇದನ್ನು dz ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಆಗ,

$$P(X = x) = \phi(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, exp\left(\frac{-z^2}{2\sigma^2}\right)dz \quad \cdots \quad (9{\cdot}3)$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ $\phi(z)$ ಎಂಬುದು z ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಸಂಭವ ಚಲಕದ ಸಂಭವ ಸಾಂದ್ರತೆಯಾಗುವುದು.

ಇದಕ್ಕೆ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ಫಲನ ಎಂದು ಹೆಸರು ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಪ್ರಾಪ್ತವಾಗುವ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ವಿತರಣೆಗೆ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ ಎಂದು ಹೆಸರು.

x ಚಲಕದ ವಿಚಲನೆ npq ಆದುದರಿಂದ $z(=x/\sqrt{n})$ ಚಲಕದ ವಿಚಲನೆ pq ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ, 1ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ σ ಎಂಬುದು z ಚಲಕದ ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ (standard deviation) ಆಗುವುದು.

10 ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಕ್ರದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

$$Y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \quad .... \ (10\cdot1)$$

ಎಂಬುದು ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಕ್ರದ ಸಮೀಕರಣ. ಇಲ್ಲಿ xನ ಮಧ್ಯಮವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುವುದು. xನ ಮಧ್ಯಮವು m ಇರುವ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಕ್ರದ ಸಮೀಕರಣವು,

$$Y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad .... \ (10\cdot2)$$

ಎಂದಿರುವುದು.

ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಕ್ರವು ಕೆಳಕಂಡ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

1. ವಕ್ರವು $-\infty$ ಇಂದ $+\infty$ ವರೆಗೆ ಹರಡಿರುವುದು. ತುದಿಗೆ ಹೋದಂತೆಲ್ಲಾ Yಯ ಬೆಲೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವುದು.

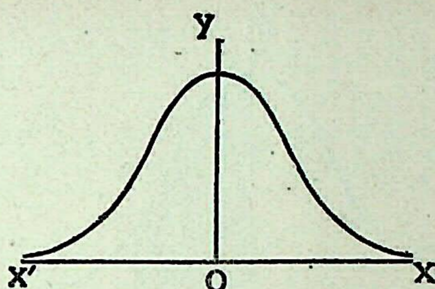
2. ವಕ್ರವು $x=m$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಸಮ್ಮಿತವಾಗಿರುವುದು.

3. $x=m$ ಇದ್ದಾಗ, Y ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದುವುದು ; ಮತ್ತು ಈ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

4. ವಿತರಣೆಯ ಬಹುಲಕವು (mode) ಮತ್ತು ಅರ್ಧಕ (median) ಎರಡೂ ಮಧ್ಯಮದೊಡನೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವುವು.

5. x – ಅಕ್ಷವು ವಕ್ರಕ್ಕೆ ಅನಂತ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ (asymptote) ಆಗುವುದು.

6. $x=m\pm\sigma$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿ ವಕ್ರದಲ್ಲಿ ನತಿಪರಿವರ್ತನ ಬಿಂದುಗಳು (points of inflexion) ಇರುವುವು. ಇವನ್ನು ನಿಗಮನ ಮಾಡಲು $d^2y/dx^2=0$ ಎಂದು ಬರೆದು, ದೊರೆತ ಸಮೀಕರಣದ ತೀರಿಕೆಗಳನ್ನು (solutions) ಕಾಣಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 6.4

7. ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಗೆ ಮಧ್ಯಮ (ಸರಾಸರಿ) ವ್ಯತಿಕಲನ

$$= \sigma\sqrt{2/\pi} = 0{\cdot}7979\,\sigma = \frac{4}{5}\,\sigma \text{ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)}$$

8. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಂತರದಲ್ಲಿ x ಇರುವ ಸಂಭವತೆ ಬೇಕಿದ್ದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು (6·5) ವಕ್ರದಡಿ ಅದೇ ಅಂತರಗಳ ನಡುವಣ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಕ್ರದ ಸಲೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು. ಮಧ್ಯಮವನ್ನು 0 ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, 0 ಮತ್ತು x ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಭವ ಚಲಕ ಇರುವ ಸಂಭವತೆ

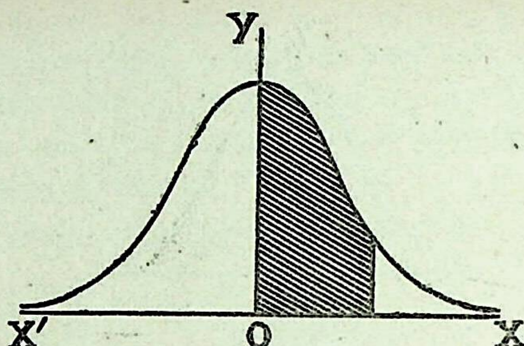
$$p = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^x exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)dx \quad \ldots\ldots \quad (10{\cdot}3)$$

ಈಗ $(x-m)/\sigma = t$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (10·2) ಈ ಕೆಳಕಂಡ ರೂಪಕ್ಕಿಳಿಯುವುದು.

$$p = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_0^u e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du \quad \ldots\ldots \quad (10{\cdot}4)$$

ಇಲ್ಲಿ uನ್ನು ಮಾನಕ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ಚಲಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅನುಕಲದ ಬೆಲೆಯನ್ನು u ಚಲಕದ 0·01 ಅಂತರದ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಗಣಿಸಿ 6·5ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ಕೋಷ್ಟಕ : ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಕ್ರದ ಕೆಳಗಣ ಸಲೆ ಮಧ್ಯಮ $X = 0$ ಇಂದ $X = x$ ಎಂಬ ಭುಜಾಕ್ಷದವರೆಗಿನ ಸಲೆಯನ್ನು $u = x/\sigma$ವಿನ 0·01 ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.5

ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಿತರಣೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಹಲವಾರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

1. $m \pm \sigma$: ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಕ್ರದ ಸಲೆ

$$= 2 \times (0{\cdot}3413) = 0{\cdot}6826.$$

ಅಂದರೆ, $m \pm \sigma$ ಅಂತರದಲ್ಲಿ, ವಕ್ರದ ಕೆಳಗಣ ಸಲೆಯ 68·26% ಭಾಗ ಇರುವುದು.

2. $m \pm 2\sigma$ ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿನ ಸಲೆ $= 2 \times (0{\cdot}4773) = 0{\cdot}9546$; ಅಂದರೆ 95·46% ಸಲೆಯ ಭಾಗ ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

3. $m \pm 3\sigma$: ಈ ಅಂತರದಲ್ಲಿನ ಸಲೆ $= 2 \times (0{\cdot}4987) = 0{\cdot}9974$ ಅಂದರೆ 99·74% ಸಲೆಯ ಭಾಗ ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಕ್ರದ ಸಲೆಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬಳಸಿ ಹಲವಾರು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಇದರಡಿ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : 1. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ತಯಾರಾಗುವ ವಿದ್ಯುದ್ದೀಪಗಳ ಜೀವನ ಕಾಲದ ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆ 2050 ಗಂಟೆ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ 80 ಗಂಟೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ತಯಾರಾಗುವ ದೀಪಗಳಲ್ಲಿ (i) 2150 ಗಂಟೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಕಾಲ ಉರಿಯುವ ದೀಪಗಳ ಪ್ರಮಾಣ ಎಷ್ಟು ? (ii) 1930 ಗಂಟೆಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಉರಿಯುವ ದೀಪಗಳ ಪ್ರಮಾಣ ಎಷ್ಟು ?

ಒಡಪು : ದತ್ತ : ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವತೆಯ ವಕ್ರದ ಮಧ್ಯಮ $m = 2050$ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ $= 80$.

ಕೋಷ್ಟಕ 6·5: ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಕ್ರದ ಸಲೆ

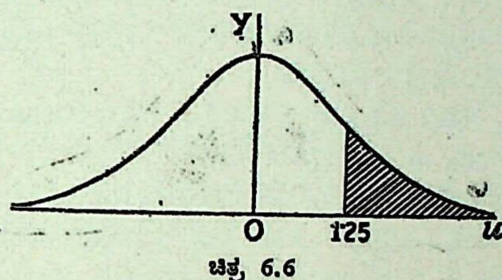
$u=x/\sigma$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0159	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4485	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4762	.4767

ಕೋಷ್ಟಕ 6·5: ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಕ್ರದ ಸಲೆ (ಮುಂದುವರಿದುದು)

$u=x/a$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4865	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998

(i) ಮಧ್ಯಮದಿಂದ 2150 ಇದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $= 100$. ಇದನ್ನು ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲು ಬರುವ ಲಬ್ಧಕ್ಕೆ (standardised deviate) ಮಾನಕ ಪಡಿಸಿದ ವ್ಯತಿಕಲನ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಅಂದರೆ,

$$u = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{100}{80} = 1{\cdot}25$$



ಚಿತ್ರ 6.6

ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವತೆ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $u = 1{\cdot}25$ ಆದಾಗ, ಸಲೆ $= 0{\cdot}3944$; ಆದುದರಿಂದ $x = 2150$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಇರುವ ಸಲೆ

$$= {\cdot}5000 - {\cdot}3944 = {\cdot}1056$$

ಅಂದರೆ, ಶೇಕಡ 10·56ರಷ್ಟು ದೀಪಗಳು 2150 ಗಂಟೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಕಾಲ ಉರಿಯುವುವು.

(ii) 1930 ಗಂಟೆ ಮಧ್ಯಮದಿಂದ ಇದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 120 ಗಂಟೆಗಳು ಎಡಗಡೆಗೆ ಮಧ್ಯಮದಿಂದ ಇದರ ವ್ಯತಿಕಲನ ಎಡಗಡೆಗೆ $= (2050 - 1930) = 120$. ಇದನ್ನು ಮಾನಕಪಡಿಸಲು $u = 120/80 = 1{\cdot}5$ ಆಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ 1930 ಮತ್ತು 2050 ಅಂತರದಲ್ಲಿನ ಸಲೆ $= 0{\cdot}4332$ ಆದುದರಿಂದ 1·5ಗೆ ಎಡಗಡೆಯ ಸಲೆ $= 0{\cdot}0668$. ಆದುದರಿಂದ ಶೇಕಡ 6·68ರಷ್ಟು ದೀಪಗಳು 1930 ಗಂಟೆಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಉರಿಯುವುವು.

ಉದಾ : 2. ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ 1000 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕುಳಿತಿರುವರು. ಅವರು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನ 40% ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ 10% ಇರುವುವು. ಅವರು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ವಿತರಣೆಯು ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿ.

(i) ಕನಿಷ್ಠ ಅಂಕವು 30% ಎಂದು ನಿಗದಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಸುಮಾರು ಎಷ್ಟು ಮಂದಿ ಪಾಸಾಗುವರು ? (ii) ಒಟ್ಟು 750 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗಬೇಕಾದರೆ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗಲು ಕನಿಷ್ಠ ಅಂಕ ಎಷ್ಟು ಎಂದು ನಿಗದಿ ಮಾಡಬೇಕು ? (ಮದ್ರಾಸ್ ವಿಶ್ವ.ವಿ.)

ಒಡಪು : (i) ಮಧ್ಯಮ $= m = 40$; ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ $= \sigma = 10$.

$\therefore x = 30$ ಆದಾಗ,

$$u = \frac{m - x}{\sigma} = \frac{40 - 30}{10} = 1.$$

ಆದ್ದುದರಿಂದ, $P(30 \leqslant x \leqslant 40) = 0.3413$ (ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ)

$$\therefore P(x < 30) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

ಅಂದರೆ, ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ನಪಾಸಾಗುವ ಸಂಭವತೆ 0.1587 ಮತ್ತು ಉತ್ತೀರ್ಣನಾಗುವ ಸಂಭವತೆ 0.8413 ಇರುವುದು.

$\therefore$ ಒಟ್ಟು 1000 ಜನ ಪರಿಕ್ಷಾರ್ಥಿಗಳ ಪೈಕಿ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗುವ ಪರೀಕ್ಷಾರ್ಥಿಗಳ ಅಂದಾಜು ಸಂಖ್ಯೆ $= 841$ (ನಿಕಟ ಬೆಲೆ).

(ii) ಪರಿಕ್ಷಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ 750 ಜನ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗಬೇಕಾದರೆ ನಪಾಸಾಗುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 250$. ಇದು ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 0.25 ಭಾಗವಾಗುವುದು.

ಮಾನಕ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಭವ ವಕ್ರದಲ್ಲಿ .250 ಸಲೆಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ವ್ಯತಿಕಲನ $= 0.674$.

$$\therefore x = m - 0.674\sigma$$
$$= 40 - 6.74 = 33.26 \text{ (ನಿಕಟ ಬೆಲೆ)}$$

ಅಂದರೆ, ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗಲು ಕನಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳು 33 ಎಂದು ನಿಗದಿ ಮಾಡಬೇಕು.

ಉದಾ : 3. ಒಂದು ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ 20.9% ಇಸಮುಗಳು 125 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯವು, ಮತ್ತು 38.3% ಇಸಮುಗಳು 165ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೆಲೆಯವು. ಆ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಡಪು : ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮ m ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ σ ಇರಲಿ. 20.9% ಇಸಮುಗಳು 125ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ, ಒಟ್ಟು ಇಸಮುಗಳ 29.1% ಭಾಗ 125 ಮತ್ತು m ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕು; ಆದುದರಿಂದ, ಮಾನಕ ಪಡಿಸಿದ ವ್ಯತಿಕಲನ $= 0\ 81$ (ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ) ;

$$\therefore (m - 125)/\sigma = 0.81, \therefore m - 125 = 0.31\sigma \quad .... \ (1)$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ, 38.3% ಇಸಮುಗಳು 165ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ 125 ಮತ್ತು 165 ಇವುಗಳ ನಡುವಣ ಭಾಗ 11.7% ಇರಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಮಾನಕ ಪಡಿಸಿದ ವ್ಯತಿಕಲನ $= 0.30$ (ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ) ;

$\therefore (165 - m)/\sigma = 0{\cdot}30; \therefore 165 - m = 0{\cdot}30\sigma \quad .... (2)$

ಮೇಲಿನ ಸಾಮಗಳು (1), (2) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೊಡಲು

$165 - 125 = 1{\cdot}11\sigma; \quad \therefore \sigma = 36$

$\therefore m = 125 + 0{\cdot}81\sigma = 125 + 29{\cdot}16 = 154{\cdot}16$

$= 154{\cdot}2$ (ಒಂದು ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಸಂಸ್ಕರಿಸಲು)

ದತ್ತ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮ $= 154{\cdot}2$ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ $= 36$.

12 ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ ಹಿರಿಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಹಲವು ಕಾರಣಗಳಿವೆ.

1. ಭೌತಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಅಳತೆಯಲ್ಲಾಗುವ ಭ್ರಂಶಗಳು (errors) ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಂತೆ ಹರಡಿರುವುವು. ಆದುದರಿಂದ ಅಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ ಈ ವಿತರಣೆಯು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿರುವುದು.

2. ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಳತೆಗಳು (ಜನರ ಎತ್ತರ, ತೂಕ, ರಕ್ತದ ಒತ್ತಡ, ನಾಡಿಯ ಮಿಡಿತ ಮೊದಲಾದವು) ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಂತೆ ಹರಡಿರುವುದಾಗಿ ಕಂಡುಬಂದಿದೆ.

3. ಸಾಮಾಜಿಕ ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಬಂಧಿ ಮಾಹಿತಿಗಳೂ ಸಹ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಂತೆ ಹರಡಿರುವುವು.

4. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ದೊರೆಯುವ ಗಂಟಾಕಾರದ ಸಮ್ಮಿತ ವಿತರಣೆಗಳು ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಮೆಯಾಗಿದ್ದರೂ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನೇ ಬಹಳ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಹೋಲುವುವು.

5. ಮೂಲ ವಿಶ್ವದ ವಿತರಣೆ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದಾಗ್ಯೂ n ಗಾತ್ರದ ಪ್ರತಿದರ್ಶದ ಮಾಧ್ಯಮವು ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಅನುಸರಿಸುವುದು ಎಂದು ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ. ಪ್ರತಿದರ್ಶದ ಗಾತ್ರ n ಅನಂತಕ್ಕೆ ಉಪಗಮಿಸಿದಾಗ ಪ್ರತಿದರ್ಶದ ಮಧ್ಯಮದ ವಿತರಣೆ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಾಗುವುದು ಎಂದು ಕೇಂದ್ರಾಭಿಮಿತಿ ಪ್ರಮೇಯದ ಬಲದಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

ಈ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಗೆ ಹಿರಿಯ ಸ್ಥಾನ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

1. ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ ಶೇಕಡಾ 20 ಮಂದಿ ಅಕ್ಷರಸ್ಥರಿರುವರೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ ಒಬ್ಬ ಅಕ್ಷರಸ್ಥನನ್ನು ಭೇಟಿ ಮಾಡುವುದರ ಸಂಭವತೆ $\frac{1}{5}$ ಇರುತ್ತದೆ. 100 ಎಣಿಕೆ ದಾರರು ಹೊರಟು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನೂ 10 ಮಂದಿಯನ್ನು ಭೇಟಿ ಮಾಡಿ ಅವರೆಲ್ಲ ಅಕ್ಷರಸ್ಥರೇ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂದು ವಿಚಾರಿಸಿ ತಿಳಿಯುತ್ತಾನೆ. 3 ಮಂದಿ ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ಕಡಿಮೆ ಅಕ್ಷರಸ್ಥರು ಭೇಟಿಯಾದರೆಂದು ಹೇಳುವ ಎಣಿಕೆದಾರರು ಎಷ್ಟು ಜನ ಇರುವರು ಎಂದು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು ?

2. ಒಂದು ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳವನ್ನು ತೂರಿದಾಗ 5 ಅಥವಾ 6 ಬಿದ್ದರೆ ಜಯ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. 100 ಸಲ ಹೀಗೆ ತೂರಿದಾಗ ಎಷ್ಟು ಸಲ 3 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಜಯಗಳು ದೊರೆಯುವುವು ?

3. ಭಾರತ ಪಾಕಿಸ್ಥಾನ ಯುದ್ಧದಲ್ಲಿ, ಭಾರತ ವಾಯು ಸೇನೆಯ ಫಿರಂಗಿ ದಳದವರು 5ರಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ 3 ಪಾಕಿಸ್ಥಾನಿ ವಿಮಾನಗಳನ್ನು ಹೊಡೆದು ಉರುಳಿಸಿದರು. 8 ಪಾಕಿಸ್ತಾನಿ ವಿಮಾನಗಳಿಗೆ ನಮ್ಮ ವಾಯುಸೇನೆಯವರು ಗುರಿಯಿಟ್ಟು ಹೊಡೆದರೆ, ತಪ್ಪಿಸಿಕೊಂಡ ವಿಮಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2ಕ್ಕಿಂತ ಮೀರದಿರುವ ಸಂಭವತೆ ಎಷ್ಟು ?

4. ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯಲ್ಲಿ ತಯಾರಾಗುವ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ 200ರಲ್ಲಿ 1ರಂತೆ ದೋಷಯುಕ್ತವಾದದ್ದು ಇರುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಡಬ್ಬಿಯಲ್ಲಿ 100ರಂತೆ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಕಳುಹಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅಂಥ 200 ಡಬ್ಬಿಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ

(a) ದೋಷ ರಹಿತವಾದ ಡಬ್ಬಿಗಳು ಎಷ್ಟು ಸಿಗಬಹುದು ?

(b) 2 ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ದೋಷಯುಕ್ತ ವಸ್ತುಗಳುಳ್ಳ ಡಬ್ಬಿಗಳು ಎಷ್ಟು ಸಿಗಬಹುದು ?

5. ಒಬ್ಬ ಟೈಪಿಸ್ಟ್ 100 ಪುಟಗಳನ್ನು ಟೈಪು ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪುಟದಲ್ಲೂ ಎಸಗಿದ ತಪ್ಪುಗಳ ವಿತರಣೆ ಹೀಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿ ಪುಟಕ್ಕೆ ತಪ್ಪುಗಳು	0	1	2	3	4	5
ಅಂಥ ಪುಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	48	30	14	4	3	1

ಪೋಸಾಂ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿ ತಾತ್ವಿಕ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿ.

6. ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ $N = 1000$, ಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ $= 80$ ಮತ್ತು ನಿಯತ ವಿಚಲನೆ (ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ) $= 15$ ಇದ್ದರೆ, 65 ಮತ್ತು 95ಗಳ ನಡುವಿರುವ ಇಸಮುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಷ್ಟು ?

ಅಧ್ಯಾಯ 7

ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗ ತತ್ವ
(Principle of Least Squares)

1 ಅನಿಶ್ಚಿತ ಅಳತೆ

ಅನೇಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಉದ್ದ, ತೂಕ, ವೇಗ ಇತ್ಯಾದಿ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಬೇಕಾಗುವುದು. ಅಳತೆಯ ಉಪಕರಣದಿಂದಲೂ ಪ್ರಯೋಗಕಾರನ ಅಥವಾ ವೀಕ್ಷಕನ ದೋಷಗಳಿಂದಲೂ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಲೋಪ ಉಂಟಾಗುವುದು. ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಪದೇ ಪದೇ ಅಳೆದಾಗ ದೊರೆವ ಬೆಲೆಗಳು ಇಂಥ ಲೋಪಕ್ಕೊಳಗಾಗಿ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬೆಲೆಯಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿರುವುವು. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬೆಲೆ ಏನೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು ಸುಲಭವಲ್ಲ.

2 ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವ

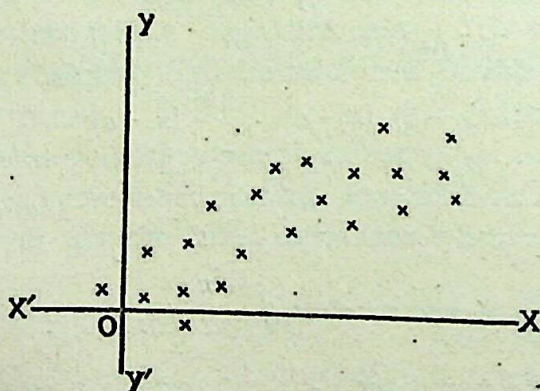
ಶತಮಾನಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಆಕಾಶಕಾಯಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ದುರ್ಬೀನು, ದೂರ ದರ್ಶಕ (telescope) ಮುಂತಾದ ಉಪಕರಣಗಳಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸುವಲ್ಲಿ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಮುಂದೆ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ತಲೆದೋರಿತು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗ ತತ್ವ (principle of least squares) ರೂಪುಗೊಂಡಿತು. xನ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು $x_1, x_2\ x_3, \ldots, x_n$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಈ ಅಳತೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ xನ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಯನ್ನು a ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, $(x_1-a), (x_2-a), \ldots, (x_n-a)$ ಇವುಗಳಿಗೆ a–ಇಂದ $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ಗಳ ಸರಿತಗಳು ಅಥವಾ ವ್ಯತಿಕಲನಗಳು(deviations)ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಸರಿತಗಳ ವರ್ಗಯೋಗವು ಕನಿಷ್ಠತಮವಾಗುವಂತೆ ಆಯ್ದುಕೊಂಡ a–ಯ ಬೆಲೆಯೇ ಉತ್ತಮವಾದ ಅಂದಾಜಾಗುವುದು ಎಂಬುದೇ ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವ.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ವ್ಯತಿಕಲನಗಳ ವರ್ಗಯೋಗ $S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$ ಆಗುವುದು. ಇದರ ಕನಿಷ್ಠತಮ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು a – ನ್ನು ಕುರಿತ ಇದರ ನಿಷ್ಪನ್ನ (derivative) ವನ್ನು ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮೀಕರಿಸಿ ದೊರೆವ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ a – ನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $\frac{dS}{da}=0$. ನಿಷ್ಪನ್ನ ಫಲವನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಸರಳೀಕರಿಸಲು ಈ ಸಮೀಕರಣವು $(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)=0$ ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಳೆಯುವುದು. ಬಿಡಿಸಲು $a=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ಅಂದರೆ ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ಗಳ ಸರಾಸರಿ ಅಥವಾ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮವೇ (Arithmetic mean) ಉತ್ತಮ ಆಗಣಕ ಬೆಲೆ (ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆ) ಆಗುವುದು.

3 ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ

ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ x, y ಎಂಬ ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಅವೆರಡರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಗಣಿತ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಹಚ್ಚಬೇಕಾದೀತು. ಈ ಚಲಕಗಳ ಸಂವಾದಿ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳು ಅಳತೆಯ ಲೋಪದೋಷಗಳಿಗೆ ಈಡಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಚಲಕಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಇವುಗಳಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಗೊತ್ತುಹಚ್ಚಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕೆ ತಕ್ಕ ಪ್ರಯೋಗ ತಂತ್ರವನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವುದು. ಈ ಚಲಕಗಳಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಗಣಿತ ಚಲಕವೆಂದೂ y ಎಂಬುದು ಸಂಭವ ಚಲಕವೆಂದೂ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ y ಯ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಅಳತೆಯ ತಪ್ಪುಗಳಿಗೂ, ಯದೃಚ್ಛಾ ಭ್ರಂಶಗಳಿಗೂ ಒಳಗಾಗಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 7.1

ಚಲಕಗಳ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳು $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ಇರಲಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿದರೆ ದೊರೆವ ಬಿಂದುಪುಂಜದ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ x, y ಗಳಿಗೆ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೆಂದು ಊಹಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y = a + bx$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವದೆಂತು ? ಅಲ್ಲದೆ, ಅಂಥ ಹಲವಾರು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಲ್ಲವೆ? ಯಾವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ತವಾಗಿರುವುದೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ? ಇದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

$y = a + bx$ ಎಂಬುದು ಊಹಿಸಿದ ಸಂಬಂಧವಾದರೆ ಉಕ್ತರೇಖೆಯನ್ನು ದತ್ತ ಅವೇಕ್ಷಣಗಳಿಗೆ ಹಾಳಿತವಾಗಿ ಪೊರ್ದಿಸ (fit) ಬೇಕು. x ನ ಬೆಲೆ x_i ಆದಾಗ y ಯ ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆ $a + bx_i$ ಆಗಬೇಕು. y - ಯ ಅವೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆ y_i ಆದರೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಅಥವಾ ವ್ಯತಿಕಲನ $y_i - (a + bx_i)$ ಆಗುವುದು. ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗ ತತ್ವದ ಮೇರೆಗೆ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ ಕನಿಷ್ಠತಮವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ

$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2$ ಕನಿಷ್ಠತಮವಾಗಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ,

a, b ಗಳನ್ನು ಕುರಿತ S - ನ ಅಂಶಿಕ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು (partial derivatives) ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು ; ಅಂದರೆ $dS/da = 0$, $\frac{dS}{db} = 0$.

ಇವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ಬರೆದರೆ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವುವು.

$$\Sigma y - \Sigma a - b\Sigma x = 0 \qquad \ldots\ (3\cdot1)$$

$$\Sigma xy - a\Sigma x - b\Sigma x^2 = 0 \qquad \ldots\ (3\cdot2)$$

ಇವಕ್ಕೆ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಅಥವಾ ನಾರ್ಮಲ್ (normal) ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಾಗಿ ದೊರೆವ a ಮತ್ತು b ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗ ಬೆಲೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 3.1ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು n ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \qquad \ldots\ (3\cdot3)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು. ಇಲ್ಲಿ $\bar{x}, \bar{y}$ ಗಳು x, y ಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮಗಳು (Arithmetic Means) ಅಂದರೆ x, y ಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೀಡುವ ಸರಳ ರೇಖೆ $(\bar{x}, \bar{y})$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು $a = \bar{y} - b\bar{x}$

ಆಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು $y - \bar{y} = (x - \bar{x})$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಹಾಗೂ x – ನ ಬೆಲೆ ದತ್ತವಾದಾಗ ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ y – ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆಗಣನ(ಅಂದಾಜು)ಮಾಡಬಹುದು. ಹಾಗೆ ಆಗಣನ ಮಾಡಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು y' ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, $y' = \bar{y} + b(x - \bar{x})$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಹಾಗೆ ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದ ಬೆಲೆಗೂ y – ನ ಆವೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತಿಕಲನ $y - y'$ ಆಗುವುದು; ಈ ವ್ಯತಿಕಲನವನ್ನು $y - \bar{y} - b(x - \bar{x})$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಹೀಗಾಗಿ ವ್ಯತಿಕಲನಗಳ ವರ್ಗಯೋಗ $S = \Sigma[(y - \bar{y}) - b(x - \bar{x})]^2$ ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವವನ್ನು ಪ್ರಯುಕ್ತಿಸಿದರೆ, bಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು $\Sigma(x - \bar{x})\ [(y - \bar{y}) - b(x - \bar{x})] = 0$ ಎಂಬ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು

$$b = \Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y}) / \Sigma(x - \bar{x})^2, \qquad \dots \quad (3{\cdot}4)$$

ಎಂಬ ಫಲ ಸಿದ್ಧಿಸುವುದು.

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬಹುದು. ಗದ್ದೆಗಳಿಗೆ ಹಾಕಿದ ರಸಾಯನಿಕ ಗೊಬ್ಬರ x ಚೀಲಗಳು ಇದ್ದಾಗ ಬೆಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣ y ಕ್ವಿಂಟಾಲುಗಳು ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ. ಇವುಗಳ ಸಂವಾದಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿ ಕೋಷ್ಟಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಹಾಳಿತವಾದ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿ y – ನ್ನು x – ನ ಫಲನವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು.

ಕೋಷ್ಟಕ 7.1
ಗೊಬ್ಬರ ಮತ್ತು ಬೆಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣ

x:	10	12	13	11	15	16	17	14
y:	85	93	90	95	96	98	99	94

ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಲು $X = x - 10$ ಮತ್ತು $Y = y - 90$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ X, Y ಗಳ ಸಂವಾದಿ ಬೆಲೆಗಳು ಹೀಗಿರುವುವು.

X:	0	2	3	1	5	6	7	4
Y:	–5	3	0	5	6	8	9	4

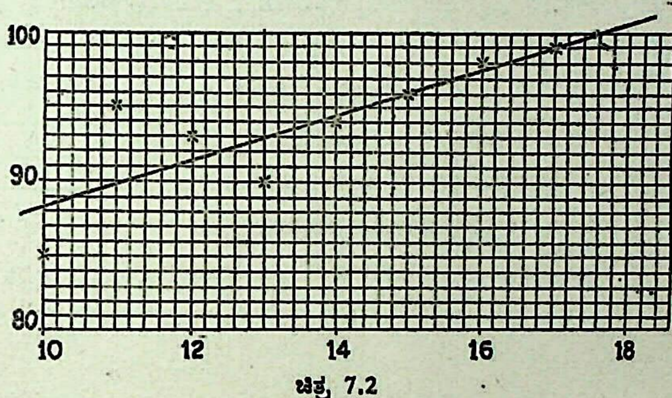
ಈಗ $Y = a + bX$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವದ ಮೇರೆಗೆ a, b ಗಳ ಕೆಳಕಾಣಿಸಿದ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವುವು.

$$8a + 28b = 30; \quad 28a + 140b = 168$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಾಗಿ $a = -3/2$, $b = 3/2$. ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವದ ಮೇರೆಗೆ ಪೊರ್ದಿಸಿದ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣ $Y = -3/2 + 3/2x$ ಆಗುವುದು. ಇದನ್ನೇ x, y ಗಳ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ, $y - 90 = -3/2 + 3/2(x - 10)$ ಆಗುವುದು ; ಅಂದರೆ

$$y = 73\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{2}x \qquad \ldots\ldots \quad (3{\cdot}5)$$

ಪೊರ್ದಿಸಿದರೆ ರೇಖೆಯು ಆಲೇಖವನ್ನು 7·2ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.2

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿಮಾಣದ ಗೊಬ್ಬರವನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ ಎಷ್ಟು ಬೆಳೆಯನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು ಎಂಬ ಅಂದಾಜು ಸಹ ಸಿಗುವುದು. ಮಸಲಾ $14\tfrac{1}{2}$ ಚೀಲದಷ್ಟು ಗೊಬ್ಬರವನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದಾದ ಬೆಳೆ $= 73\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{2} \times 14\tfrac{1}{2} = 95\tfrac{1}{4}$; ಅಂದರೆ $95\tfrac{1}{4}$ ಕ್ವಿಂಟಾಲಿನಷ್ಟು ಬೆಳೆ ಸಿಗುವ ನಿರೀಕ್ಷೆ ಇದೆ. ಕಾರಣಾಂತರಗಳಿಂದ ನಿಜಕ್ಕೂ ಈ ಅಂದಾಜಿಗಿಂತ ಬೆಳೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿಯೂ ಸಿಗಬಹುದು.

4 ಪೊರ್ದಿಕೆಯ ಸುಲಭೋಪಾಯ

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಗಣನಾಕ್ರಮವನ್ನು ಸೂಕ್ತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಹಗುರ ಮಾಡಬಹುದು. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ವಿಶದಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ. 1953 ರಿಂದ 1961ರವರೆಗೆ ಭಾರತ ದೇಶ

ದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾದ ಟೀ ಸೊಪ್ಪಿನ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 7·2ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ವರ್ಷ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ, ಟೀ ಸೊಪ್ಪಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು y ಎಂದು (ಕೋಟಿ ಪೌಂಡುಗಳಲ್ಲಿ) ಸೂಚಿಸೋಣ. ದತ್ತ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಹಾಳಿತವಾಗಿ $y = a + bx$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಬೇಕೆನ್ನಿ. 1957ನೆಯ ಇಸವಿಯನ್ನು ಕಾಲಮಾನದ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಸರಳತೆ ಯನ್ನು ತಂದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. (3·1) ಮತ್ತು (3·2) ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಗಳಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಪದಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಡಪು ಸುಗಮವಾಗುವುದು. (ಪುಟ ೧೨೭ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಹೇಗೆಂದರೆ 2ನೇ ಕಲಮನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ, $\Sigma X = 0$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ ವಾಗುವುದು. ಈಗ $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + r^2)$ ಎಂಬುದು $\frac{1}{6}r(r+1)(2r+1)$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬ ಬೀಜಸೂತ್ರವನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕ ದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, $\Sigma X^2 = (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 2\{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\} = 2 \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6}$ $= 60$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈಗ x, y ಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $y = a + bx$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ, ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವದ ಮೇರೆಗೆ a, b ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಗಳು ಹೀಗಿರುತ್ತವೆ.

$$9a = \Sigma y = 632{\cdot}4 \qquad \ldots\ldots \quad (4{\cdot}1)$$

ಮತ್ತು
$$60b = \Sigma XY = 94{\cdot}2 \qquad \ldots\ldots \quad (4{\cdot}2)$$

ಇವು ಬಿಡಿ ಬಿಡಿಯಾದ ಎರಡು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ $a = 69{\cdot}27$ ಮತ್ತು $b = 1{\cdot}57$ ಎಂಬ ಫಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಹಾಳಿತವಾಗಿ ಪೊರ್ದಿಸಿದ ಸರಳ ರೇಖೆ $y = 69{\cdot}27 + 1{\cdot}57\,X$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ X ಎಂಬುದು 1957ನೇ ಇಸ್ವಿಯನ್ನು ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿಸಿ ಎಣಿಸಿದ ವರ್ಷಗಳು.

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಧಾರದಿಂದ ಪ್ರತಿವರ್ಷಕ್ಕೂ y-ಯ ಒಂದೊಂದು ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುವುದು. y-ಯ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು "ಅಳವಡಿಸಿದ (graduated) ಬೆಲೆಗಳು" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಆಗಣಿಸಿದ ಅಥವಾ ಅಳವಡಿಸಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು y' ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ (5)ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದೆ. 6ನೇ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ $y - y'$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಸ್ತಂಭದ ಬೆಲೆಗಳ

ಕೋಷ್ಟಕ 7·2 : ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಟೀ ಸೊಪ್ಪಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ (ಕೋಟಿ ಪೌಂಡುಗಳಲ್ಲಿ)

x	$x - 1957 = X$	y	Xy	y'	$y - y'$	$y - 68 = Y$	XY
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1953	— 4	61·5	— 246·0	62·99	— 1·49	— 6·5	26·0
1954	— 3	65·2	— 195·6	64·56	0·64	— 2·8	8·4
1955	— 2	67·8	— 135·6	66·13	1·67	— 0·2	0·4
1956	— 1	68·1	— 68·1	67·70	0·40	0·1	— 0·1
1957	0	68·5	0	69·27	— 0·77	0·5	0
1958	1	71·7	71·7	70·84	0·86	3·7	3·7
1959	2	71·9	143·8	72·41	— 0·51	3·9	7·8
1960	3	70·8	212·4	73·98	— 3·18	2·8	8·4
1961	4	77·9	311·6	75·55	2·35	9 9	39·6
ಮೊತ್ತ		623·4	94·2	11·4		11·4	94·2

ಮೊತ್ತ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕು. ಯಥಾರ್ಥವಾಗಿ ಈ ಮೊತ್ತ ಸೊನ್ನೆಯಾಗದೆ – 0·03 ಇರುವುದು. ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸಂಸ್ಕಾರ ಮಾಡಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಅಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಬಂದಿದೆಯಷ್ಟೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲದಿಂದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ y ಯ ಬೆಲೆ ಏನಿರಬಹುದು ಎಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬಹುದು. ಅದರ ಮೇರೆಗೆ 1962ರಲ್ಲಿ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆ 77·12 ಮತ್ತು 1963ರಲ್ಲಿ 78·69 (ಕೋಟಿ ಪೌಂಡುಗಳು).

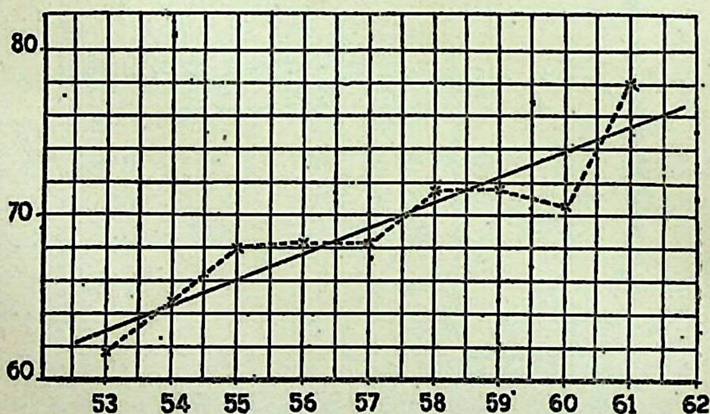
ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಹಗುರ ಮಾಡಲು $Y = y - 68$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಗ X, Y ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $Y = a + bX$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. Y ಮತ್ತು XY ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ 7ನೇ ಮತ್ತು 8ನೇ ಕಲಮುಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದೆ. (4)ನೇ ಕಲಮಿನ ಮೊತ್ತ ΣXy ಮತ್ತು 7ನೇ ಕಲಮಿನ ಮೊತ್ತ ΣXY, ಇವೆರಡೂ ಸಮನಾಗಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

$$9a = \Sigma Y = 11{\cdot}4 \quad .... \quad (4{\cdot}3)$$

ಮತ್ತು

$$60b = \Sigma XY = 94{\cdot}2 \quad .... \quad (4{\cdot}4)$$

ಇದರಿಂದ, b ಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ಹೊಸ a ಯ ಬೆಲೆ = 1·27. ಆದುದರಿಂದ ಪೊರ್ದಿದ ಸರಳ ರೇಖೆಯು $Y = 1{\cdot}27 + 1{\cdot}57X$ ಎಂದಾಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 7.3 : ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಟೀ ಸೊಪ್ಪಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ

yಗೆ $Y+68$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$Y = 69{\cdot}27 + 1{\cdot}57\,X$$

ಎಂಬ ಹಳೆಯ ಸಮೀಕರಣವೇ ಸಿದ್ಧಿಸುವುದು.

ಮೂಲ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನೂ ಪೊರ್ದಿಸಿದ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನೂ 7·3ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. (ಪುಟ ೧೨೮)

ಕ್ರಮಾಗತವಾಗಿ ಎಲ್ಲ ವರ್ಷಗಳಿಗೂ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳು ದೊರೆಯುವುದಾದರೆ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬಹುದು. ಮಧ್ಯೆ ಯಾವುದಾದರೂ ವರ್ಷದ ಅಂಕಿಅಂಶಗಳು ಸಿಗದೆ ತೆರಪಿದ್ದರೆ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೀಗೆ ಬಿಡಿ ಬಿಡಿಯಾಗಿ ಬೇರ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ.

5 ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳು

ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬೆಸವಲ್ಲದೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಮಾರ್ಪಾಡು ಮಾಡಬೇಕಾದೀತು. 1954 ರಿಂದ 1961ರವರೆಗಿನ 8 ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳು ಮಾತ್ರ ದೊರೆತಿವೆ ಎನ್ನಿ. ಆಗ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನು 1957 ಮತ್ತು 1958ರ ಮಧ್ಯೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅರ್ಧ ವರ್ಷವನ್ನು xನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಏಕಮಾನವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಮಾರ್ಪಡಿಸಿದ ಈ ಅಳತೆಯನ್ನು X ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ $y - 68 = Y$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ X, Y ಗಳಿಗಿರುವ ರೇಖೀಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $Y = c + dX$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ $\Sigma X = 0$ ಮತ್ತು $\Sigma X^2 = 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) = 168$. ಇದರಿಂದ $8c = 17{\cdot}9$ ಮತ್ತು $168d = 116{\cdot}5$ ಎಂಬ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು, $c = 2{\cdot}24$ ಮತ್ತು $d = 0{\cdot}693$. ಆದ್ದರಿಂದ ಪೊರ್ದಿಸಿದ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $Y = 2{\cdot}24 + 0{\cdot}693X$ ಇಲ್ಲಿ Xನ ಅಳತೆಯ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲಬಿಂದು 1957 ಮತ್ತು 1958ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದರಿಂದ 1958ಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ Yಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು $X = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು 2·933 ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ X ಅರ್ಧ ವರ್ಷಗಳು ಎಂಬುದು ನೆನಪಿರಲಿ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಷದ ಮಾನದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನೇ x ಎಂದು ಪರಿವರ್ತಿಸಿಕೊಂಡು ಮತ್ತು Yಯನ್ನು yಗೆ ಮರಳಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸಿ ಬರೆದರೆ

$$y = 70{\cdot}933 + 1{\cdot}386(x - 1958)$$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 7.3: ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಟೀ ಎಲೆಯ ಉತ್ಪತ್ತಿ (ಕೋಟಿ ಪೌಂಡುಗಳಲ್ಲಿ)

ವರ್ಷ x	X	y	Xy	Y	XY	Y'	y'
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1954	—7	65.2	—456.4	—2.8	19.6	—2.611	65.389
1955	—5	67.8	—339.0	—0.2	1.0	—1.225	66.775
1956	—3	68.1	—204.3	0.1	—0.3	0.161	68.161
1957	—1	68.5	—68.5	0.5	—0.5	1.547	69.547
1958	1	71.7	71.7	3.7	3.7	2.933	70.933
1959	3	71.9	215.7	3.9	11.7	4.319	72.319
1960	5	70.8	354.0	2.8	14.0	5.705	73.705
1961	7	77.9	545.0	9.9	67.3	7.091	75.090
ಮೊತ್ತ	0	699.1	116.5	17.9	116.5		

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ 1962ರಲ್ಲಿ ಟೀ ಸೊಪ್ಪಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ 76·477 ಕೋಟಿ ಪೌಂಡುಗಳು ಇರುವುದೆಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬಹುದು.

ಪರವಲಯದ ಪೂರ್ದಿಕೆ (Parabolic fit)

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಒತ್ತಾಗಿ ಪೂರ್ದಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಆಗ x, yಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $Y = a + bX + cX^2$ ಎಂಬ ಪರವಲಯದ ಫಲನದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುವುದೆಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $X = x - 1957$ ಮತ್ತು $Y = y - 68$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿ ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವವನ್ನು ಪ್ರಯುಕ್ತಿಸಿ ಕೆಳಕಂಡ ಮೂರು ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$\Sigma a + b\Sigma X + c\Sigma X^2 = \Sigma Y \quad \ldots \quad (6\cdot1)$$

$$a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 = \Sigma XY \quad \ldots \quad (6\cdot2)$$

$$a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 = \Sigma X^2 Y \quad \ldots \quad (6\cdot3)$$

ಇಲ್ಲಿ $\Sigma X = 0$; $\Sigma X^3 = 0$; $\Sigma X^2 = 60$; $\Sigma X^4 = 708$.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ a, b, cಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಬಹುದು. ಕೋಷ್ಟಕ 7·2ರಲ್ಲಿನ ಟೀ ಎಲೆಯ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಅಂಕಿಅಂಶಗಳನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. a, b, cಗಳಿಗೆ ಈ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ΣY, ΣXY, $\Sigma X^2 Y$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 7·4ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ್ದೇವೆ.

$$9a + 60c = 11\cdot4$$

$$60b = 94\cdot3$$

$$60a + 708c = 73\cdot0$$

ಆದುದರಿಂದ, $a = 1\cdot33$, $c = -0\cdot01$ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ $b = 1\cdot57$ $Y = a + bX$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೂರ್ದಿಸುವಾಗ bನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ದೊರೆತ $60b = 94\cdot3$ ಎಂಬ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವೇ ಈಗಲೂ ದೊರೆತಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದರಿಂದಾಗಿ bಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಕೋಷ್ಟಕ 7·4 : ಟೀ ಸೊಪ್ಪಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಗೆ ಪರವಲಯದ ಪ್ರೊರ್ದಿಕೆ

x	$x - 1957 = X$	y	$y - 68 = Y$	XY	X^2Y	Y'	y'
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1953	— 4	61·5	— 6·5	26·0	— 104·0	— 5·11	62·89
1954	— 3	65·2	— 2·8	8·4	— 25·2	— 3·47	64·53
1955	— 2	67·8	— 0·2	0·4	— 0·8	— 1·85	66·15
1956	— 1	68·1	0·1	— 0·1	0·1	— 0 25	67·75
1957	0	68·5	0·5	0	0	1 33	69·33
1958	1	71·7	3·7	3·7	3·7	2·89	70·89
1959	2	71·9	3·9	7·8	15·6	4·43	72·43
1960	3	70·8	2·8	8·4	25·2	5·95	73·95
1961	4	77·9	9 9	39·6	158·4	7·45	75·45
ಮೊತ್ತ	0	623·4	11·4	94·2	73·0		

ರೇಖೀಯ ಪೊರ್ದಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಬೆಲೆಯನ್ನೇ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವದ ಮೇರೆಗೆ ಪೊರ್ದಿಸಿದ ಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣ

$$Y = 1{\cdot}33 + 1{\cdot}57X - 0{\cdot}01X^2$$

ಅಥವಾ $y = 69{\cdot}33 + 1{\cdot}57X - {\cdot}01X^2$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜುಮಾಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $X = 5$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ 1962ರಲ್ಲಿ ಟೀ ಸೊಪ್ಪಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ $= 69{\cdot}33 + 1{\cdot}57 \times 5 - {\cdot}01 \times 25 = 76{\cdot}93$ (ಕೋಟಿ ಪೌಂಡುಗಳಲ್ಲಿ).

ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಪೊರ್ದಿಕೆ ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಈ ಪೊರ್ದಿಕೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಆಗಣನೆ ಮಾಡಿದ ಬೆಲೆಗಳು ಅವೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯತ್ಯಾಸವುಳ್ಳದಾಗಿದ್ದರೆ, ಪರವಲಯದ ಪೊರ್ದಿಕೆಯನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾದೀತು. 7·2ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಪೊರ್ದಿಸಿದ ಬೆಲೆಗಳು ಅಷ್ಟು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿಲ್ಲ. ಚೌಕಳಿ ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅಂಕಿತಮಾಡಿ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆದು ಅದರ ಆಕಾರವನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ ಪರವಲಯದ ಪೊರ್ದಿಕೆ ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿರುವುದೇ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದು ಗೊತ್ತಾಗುವುದು. ಕೋಷ್ಟಕ 7.5ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. 1941ನೆಯ ಇಸ್ವಿಯನ್ನು ಕಾಲವನ್ನಳೆಯುವ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿಯೂ, 10 ವರ್ಷಗಳ ಅವಧಿಯನ್ನು ಕಾಲದ ಮೂಲ ಮಾನವನ್ನಾಗಿಯೂ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ; ಅಂದರೆ $(x - 1941)/10 = X$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಪೊರ್ದಿಸುವ ಗಣನಾಕ್ರಮವನ್ನು 7.5 ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ರೇಖೀಯ ಪೊರ್ದಿಕೆಯ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು : $7a = 301$; $28b = 726$. $\therefore a = 185{\cdot}86$; $b = 25{\cdot}92$. ಆದುದರಿಂದ ಪೊರ್ದಿಸಿದ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಹೀಗಿರುವುದು.

$$y = 185{\cdot}86 + 25{\cdot}92X$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಆಗಣನ ಮಾಡಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ (6)ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅವೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಈ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಬಹಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುವುದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಪರವಲಯದ ಪೊರ್ದಿಕೆಯನ್ನು ಬಳಸುವ ಅಗತ್ಯ ತೋರುತ್ತದೆ. ಪರವಲಯದ ಪೊರ್ದಿಕೆಗೆ ಬೇಕಾದ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು :

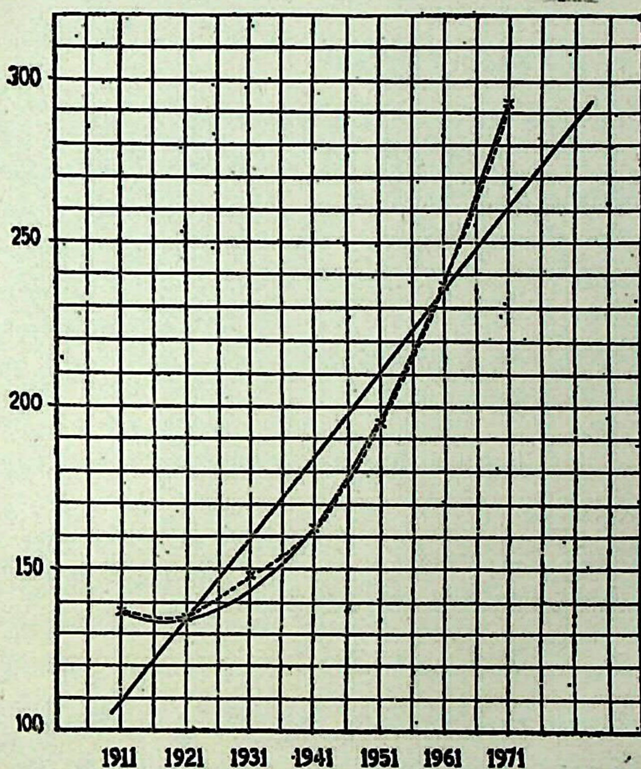
$$7a + 28c = 1301;$$
$$20a + 196c = 5672; \qquad 28b = 726$$

ಕೋಷ್ಟಕ 7.5 : ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ

ವರ್ಷ x	$\frac{x-1941}{10} = X$	ಜನಸಂಖ್ಯೆ y (ಲಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ)	Xy	X^2y	ಹೊಂದಿಸಿದ ಬೆಲೆ	
					ಸರಳ ರೇಖೆ	ಪರವಲಯ
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1911	— 3	135	— 405	1215	108·10	135·94
1921	— 2	134	— 268	536	134·02	134·01
1931	— 1	146	— 146	146	159·94	143·12
1941	0	163	0	0	185·86	163·57
1951	1	194	194	194	211·78	195·06
1961	2	236	472	944	237·70	237·69
1971	3	293	879	2637	263·62	291·46
ಮೊತ್ತ	0	1301	726	5672	1301·02	1300·02

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು, $a = 163.57$, $b = 25.92$ ಮತ್ತು $c = 5.57$. ಆದುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಪರವಲಯದ ಪೂರ್ದಿಕೆ:

$$y = 163.57 + 25.92X + 5.57X^2 \cdots$$



ಚಿತ್ರ 7.4 : ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ

ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಅಳವಡಿಸಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 7.5ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 7ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. y ಯ ಅವೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆಗಳೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿದಾಗ ಪರವಲಯುದ ಪೂರ್ದಿಕೆ ಹಾಳಿತವಾಗಿದೆಯೆನ್ನಬಹುದು. ವಕ್ರಗಳ ಆಲೇಖವನ್ನು 7.4ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಈ ಪರವಲಯದ ಪೂರ್ದಿಕೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ 1973ನೇ ಇಸ್ವಿಯಲ್ಲಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗಣಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $X = 3.2$ ದಶಕಗಳು.

$$\therefore y = 163{\cdot}57 + 25{\cdot}92 \times 3{\cdot}2 + 5{\cdot}57 \times (3{\cdot}2)^2 = 303{\cdot}55$$

ಅಂದರೆ 1973ರ ಜನಸಂಖ್ಯೆಯು 303·55 ಲಕ್ಷ ಇರುವುದು ಎಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡ ಬಹುದು.

7 ಘಾತೀಯ ಫಲನಗಳ ಪ್ರೊರ್ದಿಕೆ

x, y ಚಲಕಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವು ಘಾತೀಯವಾದಾಗ, ಅಂದರೆ $y = ab^x$ ಎಂದಿದ್ದಾಗ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದು ಸುಲಭಸಾಧ್ಯವಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ತತ್ವದ ತಳಹದಿಯಲ್ಲೇ ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಮಾಡುವ ಆಗತ್ಯವಿದೆ. ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವವನ್ನೇನೋ ಬಳಸುತ್ತೇವೆಯಾದರೂ $(Y_i - ab^{x_i})$ ಎಂಬುದರ ವರ್ಗಯೋಗದ ಕನಿಷ್ಠತಮ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದಿಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲು, $y = ab^x$ ಎಂಬ ಸಾಮ್ಯದ ಎರಡು ಬದಿಗಳ ಲಘುಗಣಕಗಳನ್ನು ಇಳಿಸಿ ಬರುವ ಸಾಮ್ಯವನ್ನು x, yಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$$\log y = \log a + x \log b \quad \text{....} \quad (7{\cdot}1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ $\log y = Y$, $\log a = A$ ಮತ್ತು $\log b = B$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$Y = A + Bx \quad \text{....} \quad (7{\cdot}2)$$

x – ನ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಕ್ತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಅಲ್ಲಿಂದ ಅಳೆದ ಬೆಲೆಯನ್ನು X ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವವನ್ನು ಈಗ ಪ್ರಯುಕ್ತಿಸಬಹುದು, ಅಂದರೆ $S = \Sigma(Y_i - A - Bx_i)^2$ ಎಂಬ ವರ್ಗಯೋಗವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠತಮ ಮಾಡಿ, ಆದರಿಂದ A, Bಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಅವೇಕ್ಷಿತ y_i ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ, $y = ab^x$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿದ ab^{x_i} ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠತಮ ಮಾಡಿದಂತಾಗಲಿಲ್ಲ. ಲೆಕ್ಕಮಾಡಲು ಅನುವಾದ ಯಾವುದೋ ಘಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಮಾತನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಮೇಲಿನ ಸಾಮ್ಯದಲ್ಲಿ A, Bಗಳ ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$\partial S/\partial A = 0$, $\partial S/\partial B = 0$ ಎಂಬ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಈ ರೂಪಗಳನ್ನು ತಾಳುವುವು :

$$\Sigma Y_i = \Sigma A + B\Sigma X_i \quad .... \quad (7{\cdot}3)$$

$$\Sigma X_i Y_i = A\Sigma X_i + B\Sigma X_i^2 \quad .... \quad (7{\cdot}4)$$

ಸೂಕ್ತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ Xನ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲ(working origin)ವನ್ನು ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು.

ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿಗೆ ನೀಡಲಾದ ಬ್ಯಾಂಕು ಮುಂಗಡದ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಇಂಥ ವಕ್ರವನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಬೇಕೆನ್ನಿ. ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 1960 ರಿಂದ 1968ರ ವರೆಗೆ ಅಂದರೆ 9 ವರ್ಷಗಳ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು (ಪುಟ ೧೩೮ರಲ್ಲಿ) ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

1964ನೇ ಇಸ್ವಿಯನ್ನು x–ನ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿ ಆಯ್ದುಕೊಂಡು $x_i - 1964 = X_i$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಆಗ $\Sigma X_i = 0$ ಆಗುವುದು ಮತ್ತು $\Sigma X_i^2 = 60$ ಆಗುವುದು. ಆಗ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸರಳ ರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತವೆ. ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $\Sigma Y_i = 34{\cdot}3000$ ಮತ್ತು $\Sigma X_i Y_i = 39{\cdot}9591$. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (7·3) ಮತ್ತು (7·4)ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ $9A = 34{\cdot}3$, ಮತ್ತು $60B = 3{\cdot}6564$ ಎಂಬ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು, $A = 3{\cdot}8111$ ಮತ್ತು $B = 0{\cdot}0609$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುವುವು.

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು Yಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ, ಅನಂತರ yಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಆಗಣನೆ ಮಾಡಿದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು y' ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 7·6ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 7ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಈಗ a, bಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$a = \text{antilog } A = \text{antilog } 3{\cdot}8111 = 6473,$$

$$b = \text{antilog } B = \text{antilog } 0{\cdot}0609 = 1{\cdot}150$$

ಆದುದರಿಂದ x, yಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$y = 6473\,(1{\cdot}15)^{(x - 1964)}$$

ಕೋಷ್ಟಕ 7.6 : ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿಗೆ ನೀಡಲಾದ ಬ್ಯಾಂಕು ಮುಂಗಡಗಳು (ಲಕ್ಷ ರೂ.ಗಳಲ್ಲಿ)

ವರ್ಷ x	ಮುಂಗಡ y	$(y - 1964) = X$	$\log y = Y$	XY	X^2Y	y'
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1960	3697	— 4	3·5678	— 14·2712	57·0848	3693
1961	4652	— 3	3·6677	— 11·0031	33·0093	4249
1962	4520	— 2	3·6551	— 7·3102	14·6204	4889
1963	5226	— 1	3·7182	— 3·7182	3·7182	5626
1964	6218	0	3·7939	— 36·3027	………	6458
1965	8011	1	3·9037	3·9037	3·9037	7449
1966	9089	2	3·9585	7·9190	15·8380	8690
1967	10112	3	4·0048	12·0144	36·0432	9930
1968	10728	4	4·0305	16·1220	64·4880	11320
ಮೊತ್ತ	62253	0	34·3000	+ 39.9591 3.6564	228·7056	

8 ಘಾತೀಯ ಫಲನದ ಮತ್ತೊಂದು ರೂಪ

x, y ಎರಡು ಚಲಕಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು $y = ax^b$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ದತ್ತ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಈ ಘಾತೀಯ ವಕ್ರವನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಬಹುದು. ಲಘುಗಣಕವನ್ನು ಇಳಿಸಲು

$$\log y = \log a + b \log x \qquad \ldots\ldots \quad (8{\cdot}2)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ $\log y = Y$, $\log a = A$, $\log x = X$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣವು

$$Y = A + bX$$

ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುವುದು. ಯಥಾರೂಢಿ, ಇದನ್ನು ದತ್ತ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಪೊರ್ದಿಸಿ A, bಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. Aಯ ಪ್ರತಿ ಲಘು ಗಣಕವನ್ನು ತೆಗೆಯಲು a ದೊರೆಯುವುದು. $y = ax^b$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಕೋಷ್ಟಕ 7·7ರಲ್ಲಿ (1) ಮತ್ತು (2) ಕಲಮುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಹಾಳಿತವಾಗಿ ಇಂಥ ಘಾತೀಯ ಫಲನವನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 7·7 : $y = ax^b$ ಘಾತೀಯ ವಕ್ರದ ಪೊರ್ದಿಕೆ

x	y	$\log x = X$	$\log y = Y$	XY	X^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	2·99	0·0000	0·4757	0·0000	0·0000
2	4·25	0·3010	0·6284	0·1892	0·0910
3	5·22	0·4771	0·7177	0·3424	0·2276
4	6·10	0·6021	0·7853	0·4730	0·3625
5	6·79	0·6990	0·8319	0·5816	0·4887
6	7·50	0·7782	0·8751	0·6810	0·6056
ಮೊತ್ತ		2·8574	4·3141	2·2672	1·7754

ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು :

$$6A + 2{\cdot}8574b = 4{\cdot}3141$$

$$2{\cdot}8574A + 1{\cdot}7754b = 2{\cdot}2672$$

$$\therefore A = 0{\cdot}4729;\ b = 0{\cdot}5139$$

$\therefore a = \text{antilog } A = 2{\cdot}971$ ಆದುದರಿಂದ ಅಭೀಷ್ಟ ಘಾತೀಯ ಫಲನ $y = 2{\cdot}97x^{0.5139}$ ಇದನ್ನು $3x^{0.5}$ ಅಥವಾ $3\sqrt{x}$ ಎಂದು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಹಾಳಿತವಾದ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿರಿ.

x:	0	5	10	15	20	25	30
y:	10	14	19	25	31	36	39

2. ಅನುಕ್ರಮವಾದ 5 ಜನಗಣತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜಿಲ್ಲೆಯ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಹೀಗಿತ್ತು. ಇದಕ್ಕೆ ಒಪ್ಪುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿ, 1974ರಲ್ಲಿ ಆ ಜಿಲ್ಲೆಯಲ್ಲಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ಏನಿರುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿರಿ.

ವರ್ಷ x	1931	1941	1951	1961	1971
ಜನಸಂಖ್ಯೆ y (ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ)	5·0	5·4	5·8	6·4	7·2

3. ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಸಿಮೆಂಟಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ. ಇವಕ್ಕೆ ಹಾಳಿತವಾದ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿರಿ. 1963ರಲ್ಲಿ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟಿದ್ದಿತು ಎಂಬುದನ್ನು ಆಗಣನ ಮಾಡಿ ಹೇಳಿರಿ.

ವರ್ಷ:	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962
ಉತ್ಪತ್ತಿ: (ಲಕ್ಷಟನ್)	44	45	49	56	61	68	78	82	86

[ಸೂಚನೆ: 1958ನ್ನು ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.]

4. ಒಂದು ಕರುವಿನ ತೂಕವನ್ನು ವಾರವಾರಕ್ಕೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿ ವಾರದ ಸರಾಸರಿ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿರಿ.

ವಯಸ್ಸು (ವಾರಗಳಲ್ಲಿ)	1	2	3	4	5
ತೂಕ (ಪೌಂಡುಗಳು)	52.5	58.7	65.0	70.2	75.4

ವಯಸ್ಸು (ವಾರಗಳಲ್ಲಿ)	6	7	8	9	10
ತೂಕ (ಪೌಂಡುಗಳು)	81.1	87.2	95.5	102.2	108.4

5. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಹಾಳಿತವಾದ ಪರವಲಯವನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿರಿ.

x:	0	1	2	3	4	5	6
y:	14	18	23	29	36	40	46

ಇದರಲ್ಲಿ xನ ಬೆಲೆ 7 ಇದ್ದಾಗ yಯ ಬೆಲೆ ಏನು ಇದ್ದೀತು ಎಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಿ.

6. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ 2ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಪರವಲಯವನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿರಿ.

7. ಭಾರತದ ಸಿಮೆಂಟಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ (ನೋಡಿ : 3ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆ) ಹಾಳಿತವಾದ ಪರವಲಯವನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿರಿ, ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ 1963ರಲ್ಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಆಗಣನ ಮಾಡಿರಿ.

8. ಕೆಳಕಂಡ ಅವೇಕ್ಷಣಗಳಿಗೆ $y = Ae^{Bx}$ ಎಂಬ ವಕ್ರವನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿ.

x:	1	2	3	4	5	6
y:	14	27	40	55	68	300

(ಮದ್ರಾಸ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ)

ಅಧ್ಯಾಯ 8

ಸಹಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಸಮಾಶ್ರಯಣ

(Correlation and Regression)

1 ದ್ವಿಚಲ ವಿತರಣೆ

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಒಂದು ವಿವರ್ತದ ವಿತರಣೆಯನ್ನೂ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಳತೆ ಮಾನಗಳನ್ನೂ ಚರ್ಚಿಸಿದೆವು. ಈಗ ಎರಡು ವಿವರ್ತಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಎರಡು ಚಲಕ ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳಿಗಿರುವ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ, ಅನ್ಯೋನ್ಯಾವಲಂಬನೆ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲನೆಯಲ್ಲಿರತಕ್ಕ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಎರಡೆರಡು ವಿವರ್ತ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಸಿಗುವುವು. ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದಲೂ ಎರಡು ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಪಟಾಲಂನಲ್ಲಿರುವ ಜವಾನುಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತೂಕ — ಇವು ಎರಡು ವಿವರ್ತಗಳು. ಹೀಗೆಯೇ ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎರಡು ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿ.

ದೃಷ್ಟಾಂತಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಾರಾಂತ್ಯ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು ಹೀಗಿವೆ (ಪ್ರತಿ ವಿಷಯಕ್ಕೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 10). ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕವನ್ನು x ಎಂತಲೂ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕವನ್ನು y ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸುವ.

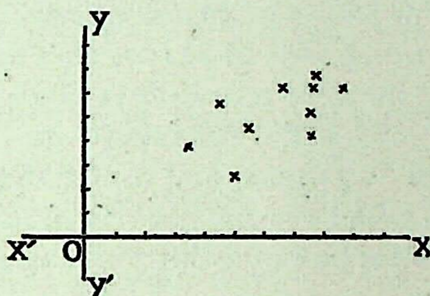
ಕೋಷ್ಟಕ 8.1 : ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು

											ಮೊತ್ತ	ಸರಾಸರಿ
x :	6	8	3	9	7	4	8	5	8	8	66	6·6
y :	5	6	4	7	7	6	7	3	7	5	57	5·7

ಈ ಎರಡು ವಿವರ್ತಗಳಿಗೂ ಇರುವ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹಲವು ಬಗೆಯಾಗಿ ಪರಿ ಶೀಲಿಸಬಹುದು.

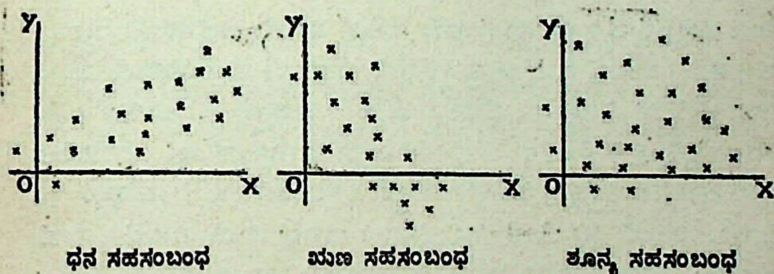
2 ಸಹಸಂಬಂಧದ ತಳಹದಿ

ಚೌಕಳಿ ಕಾಗದದಲ್ಲಿ OX ಮತ್ತು OY ಎಂಬ ಅನ್ವಯಾಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ x, y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬಿಂದು



ಚಿತ್ರ 8.1

ಗಳನ್ನು ಅಂಕಿತ ಮಾಡಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ದೊರೆತ ಪರಿಲೇಖಕ್ಕೆ ಚದರಾವಣೆಯ ಪರಿಲೇಖ (scatter diagram) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪರಿಲೇಖದ ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರಸ್ತಾರವನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಅಗಲ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೇಲೆ ಇರುವಂತೆ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವಿವರ್ತಗಳೆರಡರ ನಡುವೆ ಸಹಸಂಬಂಧ (correlation) ಇದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪಟ್ಟಿಗೆರೆಯ ವಾಟ (slope) ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ಧನವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ; ಈ ಪಟ್ಟಿಗೆರೆಯ ಓಟ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಹಸಂಬಂಧ ಋಣವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚದರಾವಣೆಯ ಪರಿಲೇಖದ ಬಿಂದುಗಳು ಪಟ್ಟಿಗೆರೆಯ ಮೇಲೆ ಇರದೆ ಕಂಡಾಬಟ್ಟೆ ಚದರಿದ್ದರೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರು



ಚಿತ್ರ 8.2 : ಸಹಸಂಬಂಧದ ಬಗೆಗಳು

ವುದು, ಅಂದರೆ, ಸಹಸಂಬಂಧ ಇಲ್ಲದಿರುವುದು. ಈ ಮೂರು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಚದರಾವಣೆಯ ಪರಿಲೇಖಗಳು ಹೇಗಿರುವುವು ಎಂಬುದನ್ನು 8.2ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

3 ಸಹಸಂಬಂಧದ ಸ್ಥೂಲ ಪರಿಮಾಣ

ಎರಡು ವಿವರ್ತಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಧನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಅದರ ಅರ್ಥ ಇದು: ಒಂದು ವಿವರ್ತದ ಬೆಲೆ ಅದರ ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಮತ್ತೊಂದು ವಿವರ್ತದ ಸಂವಾದಿ ಬೆಲೆ ಅದರ ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿಯೂ, ಮೊದಲನೇ ವಿವರ್ತದ ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಎರಡನೆಯದೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿಯೂ ಇರುವುದು. ಇಲ್ಲಿ "ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ" ಎಂದು ಹೇಳಿರುವುದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಈ ನಿರೂಪಣೆ ಅಷ್ಟು ಖಾತರಿಯಾದುದಲ್ಲ ಎಂದರ್ಥ; ಆದರೆ ಇದು ಬಹುಪಾಲು ಅಂದರೆ ಬಹುಶಃ ನಿಜವಿರುತ್ತದೆ, ಹೆಚ್ಚು ಸಂಭವನತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯತಕ್ಕದ್ದು.

8.1ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, x – ನ ಸರಾಸರಿ $= \bar{x} = 6.6$ ಮತ್ತು y – ನ ಸರಾಸರಿ $= \bar{y} = 5.7$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಆವೇಕ್ಷಣೆಯು ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು + ಎಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ – ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದು. (ಕೋಷ್ಟಕ 8.2).

ಕೋಷ್ಟಕ 8.2: ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು

$x-\bar{x}$:	−	+	−	+	+	−	+	−	+	+
$y-\bar{y}$:	−	+	−	+	+	+	+	−	+	−

ಸಮಾನ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು 8 ಇವೆ; ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳುಳ್ಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು 2 ಇವೆ. ಅಂದರೆ, ಇವೆರಡು ಪ್ರವೃತ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಪ್ರಬಲವಾದುದು ಎಂದರೆ, ಸಮಾನ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇ ಪ್ರಬಲವಾದುದು. ಆ ಪಕ್ಷಕ್ಕೆ 8 ಓಟುಗಳೂ ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಪಕ್ಷಕ್ಕೆ 2 ಓಟುಗಳೂ ದೊರೆತಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ಸಮಾನ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಪಕ್ಷಕ್ಕೆ 6 ಓಟುಗಳು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದಂತಾಯಿತು. ಒಟ್ಟಾರೆ 10 ಓಟುಗಳು, ಅಂದರೆ 10 ಜೊತೆ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ, ಈ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 6ನ್ನು 10ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಪ್ರಾಬಲ್ಯದ ಅಳತೆಯನ್ನಾಗಿ ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಈ ತರ್ಕ ಸರಣಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ 6/10 ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು

ಸಹಸಂಬಂಧದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. x, y ವಿವರ್ತಗಳ ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು r_{xy} ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿವರ್ತಗಳು x, y ಎಂದು ಅಸಂದಿಗ್ಧವಾಗಿ ತಿಳಿದಿದ್ದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ xy ಎಂಬ ಒತ್ತಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡಬಹುದು; ಬರಿಯ r ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದಲೇ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಈ ಸಂಕೇತದ ಮೇರೆಗೆ ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $r = 6/10 = 0{\cdot}6$ ಎಂದು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ಫಲಗಳನ್ನೇ ಕೆಳಗಣ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳಲ್ಲಿ $x > \bar{x}$ ಆದಾಗ $u = x - \bar{x} = +1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ $x < \bar{x}$ ಆದಾಗ $u = x - \bar{x} = -1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ, ಹಚ್ಚೋಣ. ಇದರಂತೆಯೇ $y > \bar{y}$ ಆದಾಗ $v = y - \bar{y} = +1$, ಮತ್ತು $y < \bar{y}$ ಆದಾಗ $v = y - \bar{y} = -1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ನೀಡೋಣ. ಮೇಲಣ u, v ಗಳನ್ನು ಸೂಚಕ ಚಲಕಗಳು (indicator variables) ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇವುಗಳನ್ನು 8·3ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ $uv = (x - \bar{x})(y - \bar{y})$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಸರಾಸರಿಯು r – ನ ಸ್ಥೂಲ ಬೆಲೆಯಾಗುವುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 8.3 : ಹುಸಿ ಚಲಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳು

$u = x - \bar{x}$:	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1
$v = y - \bar{y}$:	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1
uv:	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1

ಸಹಸಂಬಂಧದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ r ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಶ (correlation coefficient) ವೆಂಬ ವಿಶಿಷ್ಟ ಹೆಸರುಂಟು. ಈ ಗುಣಾಂಕದ ಸ್ಥೂಲ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$r \doteq \frac{1}{n} \Sigma\, uv = \frac{1}{n} \Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \quad \dots \quad (3{\cdot}1)$$

ಇಲ್ಲಿ $\doteq$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯು "ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಸಮ" ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

4 ಸಹಸಂಬಂಧದ ಬೆಲೆಯ ಪರಿಷ್ಕರಣ

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ವಿಧಾನಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ನಿಶಿತವಾಗಿ ಸಂಬಂಧದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.ಆವೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆಗೂ,ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಅಥವಾ ದಿಕ್ಕನ್ನು ಮಾತ್ರ ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಂಡು ಸಹ ಸಂಬಂಧದ ಸ್ಥೂಲ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಧನವೇ, ಋಣವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿದೆವು, ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತಂದುಕೊಂಡಿಲ್ಲ. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಪರಿಮಾಣವನ್ನೂ ಸಹ ಗಣನೆಗೆತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆ ಮತ್ತಷ್ಟು ಚೂಪಾಗುವುದು. ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಈ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಚಲಕದ ವಿತರಣೆಯ ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ (standard deviation) ವನ್ನು ಅಳತೆಯ ಏಕ್ಕಂ (unit) ಅಥವಾ ಮೂಲಮಾನ ವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದು ಯುಕ್ತವಾದುದೆಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ $u = \frac{(x-\bar{x})}{\sigma_x}$ ಮತ್ತು $v = \frac{(y-\bar{y})}{\sigma_y}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ, (uv) ಗುಣನ ಫಲದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗುಣಾಂಕವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧುವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಇದರ ಮೇರೆಗೆ x, y ಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ನಿಶಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$r = (\overline{uv}) = \frac{1}{n}\Sigma \frac{(x-\bar{x})}{\sigma_x} \cdot \frac{(y-\bar{y})}{\sigma_y} \quad .... \quad (4 \cdot 1)$$

ಇಲ್ಲಿ uvಯ ಮೇಲೆ ಬರೆದ ಸಲಾಕಿಯು uv ಗುಣಿತದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಕಾರ್ಲ್ ಪಿಯರ್ಸನ್ (Karl Pearson) ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಇದನ್ನು ಸಾದರ ಪಡಿಸಿದನು. ಆದಕಾರಣ ಇದಕ್ಕೆ ಪಿಯರ್ಸನ್ ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗುಣಾಂಕ ಎಂಬ ಹೆಸರಾಗಿದೆ.

$(x-\bar{x})$ ಮತ್ತು $(y-\bar{y})$ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಗುಣನ ಫಲಗಳ ಸರಾಸರಿಗೆ (ಮಧ್ಯಮಕ್ಕೆ) ಗುಣಿತ ಪ್ರಘಾತ (product moment) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು s_{xy} ಎಂಬ ಸಂಜ್ಞೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ,

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) \quad .... \quad (4 \cdot 2)$$

ಈ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರೆ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೀಡುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಕಿರಿದಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$r = s_{xy} / (\sigma_x \sigma_y) \qquad .... \quad (4{\cdot}3)$$

x, yಗಳ ಗುಣಿತ ಪ್ರಘಾತವನ್ನು x, yಗಳ ಸಹ ವಿಚಲನೆ (covariance) ಎಂತಲೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ, cov (x, y) ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ x, y ಚಲಕಗಳ ವಿಚಲನೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೆನಪು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \Sigma(x - \bar{x})^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \Sigma(y - \bar{y})^2$$

ಇದೇ ಧಾಟಿಯಲ್ಲಿ

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y}) \qquad .... \quad (4{\cdot}4)$$

ಎಂದು ಬರೆದು, ಇದನ್ನು x, yಗಳ ಸಹ ವಿಚಲನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು

$$r = \frac{\text{cov}\,(x, y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}} \qquad .... \quad (4{\cdot}5)$$

ಎಂತಲೂ,

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{x,\ y \text{ ಗಳ ಸಹ ವಿಚಲನೆ}}{(x\text{–ನ ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ}) \times (y\text{–ನ ಮಾನಕ ವ್ಯತಿಕಲನ})} \qquad .... \quad (4{\cdot}6)$$

ಎಂತಲೂ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಹಾಗೂ,

$$\text{cov}\,(x, y) = \sigma_{xy} = r\sigma_x\,\sigma_y \qquad .... \quad (4{\cdot}7)$$

ಎಂಬ ಸಾಮ್ಯವೂ ಸಿದ್ಧಿಸುವುದು.

5 ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಗಣನಾಕ್ರಮ

ಮೇಲೆ ಕೋಷ್ಟಕ 8·1ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ x, y ಗಳ ಸಹಸಹಸಂಬಂಧದ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಇದರಡಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 8.4 : ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗುಣಾಂಕದ ಗಣನಾಕ್ರಮ

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
6	5	—0.6	—0.7	0.36	0.49	0.42
8	6	1.4	0.3	1.96	0 09	0.42
3	4	—3.6	—1.7	12.96	2.89	6.12
9	7	2.4	1.3	5.76	1.69	3.12
7	7	0.4	1.3	0.16	1.69	0.52
4	6	—2.6	0.3	6.76	0.09	—0.78
8	7	1.4	1.3	1.96	1.69	1.82
5	3	—1.6	—2.7	2.56	7.29	4.32
8	7	1.4	1.3	1.96	1.69	1.82
8	5	1.4	—0.7	1.96	0.49	—0.98
66	57	0	0	36.40	18.10	16.80

ಕೋಷ್ಟಕದ ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಆಯಾ ಸ್ತಂಭಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. $\bar{x} = 6\,6$; $\bar{y} = 5.7$; $\sigma_x{}^2 = 36.4 \div 10 = 3.64$; $\sigma_y{}^2 = 18.1 \div 10 = 1.81$; $\sigma_{xy} = 16.8 \div 10 = 1.68$. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$r = \frac{1.68}{\sqrt{3\,64}\ \sqrt{1.81}} = 0.6545.$$

ಇದನ್ನು ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗುಣಾಂಕದ ನಿಖರ ಬೆಲೆ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸಂಸ್ಕರಿಸಿದರೆ, $r = 0.65$ ಆಗಬಹುದು. ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣ ದಲ್ಲಿ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ 0.6 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದು ಮೇಲಿನ ಬೆಲೆ ಗಿಂತ 0.05ರಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಶತಾಂಶದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ $\frac{.05}{.65} \times 100 = 7.7\%$. ಈ ಪ್ರಮಾಣದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ನಗಣ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು.

6 ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗಣನೆಯ ಲಘುವಿಧಾನ

ಮೇಲೆ ತೋರಿಸುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ rನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, $(x-\bar{x})^2$, $(y-\bar{y})^2$ ಮತ್ತು $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ ಎಂಬ ರಾಶಿಗಳನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಬೇಕು.

ಇವು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ವರ್ಗಗಳ ಮತ್ತು ಗುಣನ ಫಲನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಶ್ರಮವಾಗಬಹುದು. ಉಪಾಯದಿಂದ ಈ ಶ್ರಮವನ್ನು ಕಡಮೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಅದನ್ನು ಈಗ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\Sigma(x-\bar{x})^2 = \Sigma x^2 - 2\Sigma x\,\bar{x} + \Sigma \bar{x}^2 = \Sigma x^2 - 2\bar{x}\Sigma x + n\bar{x}^2$$
$$= \Sigma x^2 - 2\bar{x}\,n\bar{x} + n\bar{x}^2 = \Sigma x^2 - n\bar{x}^2$$

ಅಂದರೆ, $\Sigma(x-\bar{x})^2 = \Sigma x^2 - n\bar{x}^2 = \Sigma x^2 - \dfrac{T_x^2}{n}$ .... (6·1)

ಇಲ್ಲಿ $T_x = \Sigma x = n\bar{x}$. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ, Σx^2 ಇದರಿಂದ T_x^2/n ಇದನ್ನು ಕಳೆದರೆ $\Sigma(x-\bar{x})^2$ ಇದರ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ,

$$\Sigma(y-\bar{y})^2 = \Sigma y^2 - n\bar{y}^2 = \Sigma y^2 - \frac{T_y^2}{n} \quad .... \quad (6·2)$$

ಮತ್ತು $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}$

$$= \Sigma xy - \frac{T_x T_y}{n} \quad .... \quad (6·3)$$

ಇಲ್ಲಿ Σx^2, Σy^2 ಮತ್ತು Σxy ಇವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಲು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಗೊಂದಲವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸುಗಮವಾಗುವುದು. ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$r = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\Sigma x^2 - n\bar{x}^2}\,\sqrt{\Sigma y^2 - n\bar{y}^2}} \quad .... \quad (6·4)$$

$$= \frac{\Sigma xy - (T_x T_y/n)}{\sqrt{\Sigma x^2 - T_x^2/n}\,\sqrt{\Sigma y^2 - T_y^2/n}} \quad .... \quad (6·5)$$

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ rನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವುದನ್ನು 8.5ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ,

$T_x = 66$; $T_y = 57$; $\Sigma x^2 = 472$; $\Sigma y^2 = 343$; $\Sigma xy = 393$

$$\therefore r = \frac{393 - (66 \times 57/10)}{\sqrt{472 - 66^2/10}\,\sqrt{343 - 57^2/10}}$$

$$= \frac{16·8}{\sqrt{36·4}\,\sqrt{18·1}} = 0·6545$$

ಇದು 8.4ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪಡೆದ ಬೆಲೆಯೊಡನೆ ತಾಳೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 8.5 : ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗಣನಾಕ್ರಮ : ಲಘುವಿಧಾನ

x	y	x^2	y^2	xy	$x-6 = u$	$y-5 = v$	u^2	v^2	uv
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
6	5	36	25	30	0	0	0	0	0
8	6	64	36	48	2	1	4	1	2
3	4	9	16	12	−3	−1	9	1	3
9	7	81	49	63	3	2	9	4	6
7	7	49	49	49	1	2	1	4	2
4	6	16	36	24	−2	1	4	1	−2
8	7	64	49	56	2	2	4	4	4
5	3	25	9	15	−1	−2	1	4	2
8	7	64	49	56	2	2	4	4	4
8	5	64	25	40	2	0	4	0	0
66	57	472	343	393	6	7	40	23	21

ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಈ ಲಘುವಿಧಾನವನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು. x ಅಳತೆಗಳಿಗೆ 6 ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲಬಿಂದು (working origin) ವನ್ನಾಗಿಯೂ, y ಅಳತೆಗಳಿಗೆ 5 ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿಯೂ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. [ನೋಡಿ: ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ ಭಾಗ 1, ಪ್ರಕರಣ 7·4]. ಇದರ ಮೇರೆಗೆ $x - 6 = u$, $y - 5 = v$ ಎಂದು ಬರೆದು [ಕೋಷ್ಟಕದ (6), (7)ನೇ ಕಲಮುಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ] ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದರೆ ಸುಗಮವಾಗುವುದು. 8, 9, 10ನೇ ಕಲಮುಗಳಲ್ಲಿ u^2, v^2, uv ಇವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ. ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಪದಗಳು ಹೀಗಿವೆ.

$T_u = 6$; $T_v = 7$; $\Sigma u^2 = 40$; $\Sigma v^2 = 23$; $\Sigma uv = 21$.

6·5ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ rನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$r = \frac{21 - (6 \times 7/10)}{\sqrt{40 - 6^2/10}\ \sqrt{23 - 7^2/10}}$$

$$= \frac{16{\cdot}8}{\sqrt{36{\cdot}4}\ \sqrt{18{\cdot}1}} = 0{\cdot}6545 \text{ (ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ)} \quad .... \quad (6{\cdot}6)$$

7 ವಿವರ್ತಗಳ ರೂಪಾಂತರ

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ x, y ವಿವರ್ತಗಳನ್ನು u, v ಎಂಬ ವಿವರ್ತಗಳಿಗೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. $x = u + h$, $y = v + k$ ಎಂದು ಪರಿವರ್ತನೆ ಮಾಡುತ್ತೇನೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದ ಲಘು ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ $x = u + 6$, $y = v + 5$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ n ಆದರೆ,

$$\Sigma x = \Sigma(u + h) = \Sigma u + nh.$$

ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನೂ n ಇಂದ ಭಾಗಿಸಲು, $\overline{x} = \overline{u} + h$.

ಇದೇ ರೀತಿ, $\overline{y} = \overline{v} + k$.

ಹಾಗೂ, $x - \overline{x} = (u + h) - (\overline{u} + h) = u - \overline{u}$,

ಮತ್ತು $y - \overline{y} = (v + k) - (\overline{v} + k) = v - \overline{v}$.

ಆದುದರಿಂದ, $\Sigma(x-\overline{x})^2 = \Sigma(u-\overline{u})^2$; $\therefore \sigma_x^2 = \sigma_u^2$ .... (7·1)

ಮತ್ತು $\Sigma(y-\overline{y})^2 = \Sigma(v-\overline{v})^2$; $\therefore \sigma_y^2 = \sigma_v^2$ .... (7·2)

ಹಾಗೂ $\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y}) = \Sigma(u-\overline{u})(v-\overline{v})$;

$$\therefore \sigma_{xy} = \sigma_{uv} \quad .... \quad (7·3)$$

ಆದುದರಿಂದ,

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_u \sigma_v}{\sigma_{uv}} = r_{uv} \quad .... \quad (7·4)$$

ಅಂದರೆ, u, vಗಳ ನಡುವಣ ಸಹಸಂಬಂಧವು x, yಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಹ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ x, yಗಳನ್ನೂ ರೂಪಾಂತರಿಸಿ ದೊರೆವ u, v ವಿವರ್ತಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಹಸಂಬಂಧ ವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದರೆ, ಅದೇ ಗುಣಾಂಕವು x, yಗಳ ನಡುವಣ ಸಹಸಂಬಂಧವೂ ಸಹ ಆಗುವುದು. ಈ ಫಲನವನ್ನೇ ಬಳಸಿ 6·6ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಕ x, yಗಳ ಸಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಾಣಿಸಿದ್ದೇವೆ.

8 ರೇಖೀಯ ಪರಿವರ್ತನೆ

ಅಳತೆಯ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಅನುಕೂಲವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಕೊಂಡರೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಬೆಲೆ ಯಾವ ವಿಧದಲ್ಲೂ ಬಾಧಿತವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ವೆಂಬುದು ಇದರಿಂದ ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತವೆ. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರವಾಗಿ, ಅಳತೆಯ ಎಕ್ಕಂ ಅಥವಾ ಮೂಲ ಮಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೂ ಸಹ ದೊರೆಯುವ ಸಹಸಂಬಂಧದ ಪರಿಮಾಣ ಮಾರ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಇಂಚುಗಳಲ್ಲಾಗಲಿ, ಮೀಟರುಗಳಲ್ಲಾಗಲಿ ಅಳೆದಾಗ್ಯೂ, ಸಹಸಂಬಂಧದ ಪರಿಮಾಣ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ವೆಂಬುದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮನಸ್ಸಿಗೆ ಅರಿವಾಗಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. $u = (x-h)/a$, $v = (y-k)/b$ ಎಂಬ ರೂಪಾಂತರ ವನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. x – ನ ಅಳತೆಯ ಮೂಲಬಿಂದು ಈಗ h ಇರುವುದು, ಮತ್ತು ಅಳತೆಯ ಮೂಲಮಾನ a ಇರುವುದು. ಇದರಂತೆಯೇ, y ಯ ಅಳತೆಯ ಮೂಲಬಿಂದು k ಎಂದೂ, ಮೂಲಮಾನ b ಎಂದೂ ಇರುವುದು. ಈ ರೂಪಾಂತರವನ್ನು

$$x = au + h, \quad y = bv + k$$

ಎಂತಲೂ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಇವಕ್ಕೆ ರೇಖೀಯ ರೂಪಾಂತರಗಳು (linear transformations) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಈಗ $\Sigma x = \Sigma(au + h)$; n ಇಂದ ಭಾಗಿಸಲು, $\overline{x} = a\overline{u} + h$.

ಹಾಗೂ, $\Sigma(x - \overline{x})^2 = [(au + h) - (a\overline{u} + h)]^3$
$= a^2(u - \overline{u})^2$.

ಆದುದರಿಂದ, $\sigma_x{}^2 = a^2\sigma_u{}^3$, ಅಥವಾ $\sigma_x = a\sigma_u$.

ಇದೇ ರೀತಿ $\overline{y} = b\overline{v} + k$; $\sigma_y{}^2 = b^2\sigma_v{}^2$ ಅಥವಾ $\sigma_y = b\sigma_v$.

ಅಲ್ಲದೆ, $\Sigma(x - \overline{x})(y - \overline{y}) = \Sigma a(u - \overline{u})\, b(v - \overline{v})$
$= ab\, \Sigma(u - \overline{u})(v - \overline{v})$

ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನೂ n–ಇಂದ ಭಾಗಿಸಲು, $\sigma_{xy} = ab\, \sigma_{uv}$. ಆದುದರಿಂದ,

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \tau_y} = \frac{ab\ \sigma_{uv}}{a\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sigma_{uv}}{\sigma_u \sigma_v} = r_{uv} \quad \text{(ಇತಿ ಸಿದ್ಧಂ)}$$

.... (8·1)

ಸೂಚನೆ: ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, Σx ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಬದಲು $\Sigma f x$ ಎಂತಲೂ, $\Sigma(x - \overline{x})^3$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಬದಲು $\Sigma f(x - \overline{x})^2$ ಎಂತಲೂ ಬರೆಯತಕ್ಕದ್ದು. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ ಇತರ ಸಮಾಕಲನೆಗಳಿಗೂ f ಎಂಬ ಗುಣಕವನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಉಂಟಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

9. ಇಮ್ಮುಖ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕ

ಒಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲಿ ಓದುತ್ತಿರುವ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು 8·6ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಷಯಕ್ಕೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 10 ಇರುವುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 8.6 : ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ	ಗಣಿತದ ಅಂಕ	ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಂಕ	ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಸಂಖ್ಯೆ	ಗಣಿತದ ಅಂಕ	ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಂಕ
(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
1	7	5	26	9	7
2	2	5	27	5	6
3	7	4	28	8	6
4	7	8	29	6	6
5	6	7	30	9	6
6	6	5	31	7	5
7	4	5	32	7	6
8	9	8	33	9	7
9	6	7	34	5	4
10	7	6	35	5	6
11	6	5	36	4	3
12	8	6	37	8	5
13	9	7	38	7	7
14	3	4	39	6	4
15	7	7	40	5	5
16	8	7	41	4	6
17	6	7	42	8	7
18	3	7	43	5	3
19	4	5	44	8	7
20	7	7	45	8	5
21	6	8	46	8	7
22	6	5	47	7	6
23	3	4	48	4	4
24	6	6	49	7	6
25	6	6	50	5	5

ಈ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಂದ ಇಮ್ಮುಖ ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಇದರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ 1ನೇ ಭಾಗದ 5.9ನೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸ ಲಾಗಿದೆ ; ತಾಳೆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು 8.7ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 8.7 : ಆವೃತ್ತಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ತಾಳೆ ಪಟ್ಟಿ.

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕ = y

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕ = x

x/y	3	4	5	6	7	8	ಮೊತ್ತ
2			|				1
3		||			|		3
4	|	|	||	|			5
5	|	|	||	||			6
6		|	||	|||	|||	|	10
7		|	|||	||||	|||	|	12
8			||	||	||||		8
9				|	|||	|	5
ಮೊತ್ತ	2	6	12	13	14	3	50

ಈ ಮನೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ತಾಳೆಯ ಬೊಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಿ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆ ಮನೆ ಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, ಇಮ್ಮುಖ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೋಷ್ಟಕ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ಕೋಷ್ಟಕ (correlation table) ಅಥವಾ ದ್ವಿಚಲಕದ ಕೋಷ್ಟಕ (two-way table) ಎಂದು ಹೆಸರು.

10 ಅಂಚುಕಟ್ಟಿನ ವಿತರಣೆ

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂತಲೂ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು y ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸುವ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ

ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. 8·7ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಕಲಮುಗಳಿಂದ ಇದು ನಿರೂಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು x ವಿವರ್ತದ ಅಂಚುಕಟ್ಟಿನ ವಿತರಣೆ ಅಥವಾ ಅರುಗಿನ ವಿತರಣೆ (marginal distribution) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು xನ ಸೆರಗಿನ ವಿತರಣೆ ಎಂತಲೂ ಹೇಳಬಹುದು. x – ನ ಅಂಚುಕಟ್ಟಿನ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ 8·8ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 8·8

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಅಂಚುಕಟ್ಟಿನ ಆವೃತ್ತಿಯ ವಿತರಣೆ

ಪಡೆದ ಅಂಕ: x	2	3	4	5	6	7	8	9
ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ	1	3	5	6	10	12	8	5

ಇದೇ ರೀತಿ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಲಕ್ಷ್ಯದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಮತ್ತೊಂದು ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. 8.8ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕಡೆಯ ಸಾಲುಗಳಿಂದ y ಯ ಈ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ನಿರೂಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ yಯ ಅಂಚುಕಟ್ಟಿನ ವಿತರಣೆ ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ 8.9ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 8.9 :

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಅಂಚುಕಟ್ಟಿನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ

ಪಡೆದ ಅಂಕ : y	2	3	4	5	6	7	8
ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ	—	2	6	12	13	14	3

11 ವಿಧೇಯ ವಿತರಣೆ

8·7ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿರುವ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನವಿಟ್ಟು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ, xನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ ಹಲವು yನ ಬೆಲೆಗಳು ಇರುವುದು ಅರಿವಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x = 5$ ಇದ್ದಾಗ y-ನ ಬೆಲೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ: 6, 4, 6, 5, 3, 5 ಅಂದರೆ yನ ಬೆಲೆ ಚದರಿವೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. yನ ಈ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ 8·10ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 8·10

$x = 5$ ಇದ್ದಾಗ, y ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ

y-ನ ಬೆಲೆ	3	4	5	6	ಒಟ್ಟು
ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ	1	1	2	2	6

ದ್ವಿ ವಿವರ್ತ ವಿತರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ವಿವರ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಾಡಿ ಸ್ಥಿರೀಕರಿಸಿದಾಗ, ಒದಗುವ ಮತ್ತೊಂದು ವಿವರ್ತದ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ವಿಧೇಯ ವಿತರಣೆ ಅಥವಾ ಅಧೀನ ವಿತರಣೆ (conditional distribution) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 8·10ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು $x=5$ ಇದ್ದಾಗ yನ ವಿಧೇಯ ವಿತರಣೆಯಾಗುವುದು. $x = 7$ ಇದ್ದಾಗ ದೊರೆಯುವ y-ನ ವಿಧೇಯ ವಿತರಣೆಯನ್ನು 8·11ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 8·11

$x = 7$ ಇದ್ದಾಗ y-ನ ವಿಧೇಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ

y-ನ ಬೆಲೆ	4	5	6	7	8	ಒಟ್ಟು
ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ	1	3	4	3	1	12

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ y–ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿಗದಿ ಮಾಡಿ ಸ್ಥಿರೀಕರಿಸಿ, ಇದಕ್ಕನುಗುಣವಾದ x–ನ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು yನ ವಿಧೇಯ ವಿತರಣೆ ಎಂದು ಕರೆವರು. $y = 6$ ಇದ್ದಾಗ ಲಭಿಸುವ xನ ವಿಧೇಯ ವಿತರಣೆಯ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 8·7ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 6 ಎಂಬ ಶೀರ್ಷಿಕೆಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. 1, 2, 3, 4, 2, 1 ಇವುಗಳನ್ನೇ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ 8·12ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 8·12

$y = 6$ ಇದ್ದಾಗ xನ ವಿಧೇಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ

xನ ಬೆಲೆ	4	5	6	7	8	9	ಒಟ್ಟು
ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ	1	2	3	4	2	1	13

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಮನವರಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

12 ಇಮ್ಮುಖ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗಣನೆ

ಎರಡು ಸಂಬದ್ಧ ವಿವರ್ತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಜೊತೆ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅವುಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ 5, 6, 7, 8 ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇಮ್ಮುಖ ಆವೃತ್ತಿಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ವಿವರ್ತಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಈಗ ವಿಮರ್ಶಿಸೋಣ.

x, y ವಿವರ್ತಗಳ ಇಮ್ಮುಖ ಆವೃತ್ತ ವಿತರಣೆಯನ್ನು 8·13ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 8·13

ಇಮ್ಮಡಿ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗಣನೆ

ಸಂಖ್ಯಾ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕ = y

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪಡೆದ ಅಂಕ = x

x \ y	u \ v	3	4	5	6	7	8	f_u	uf_u	u^2f_u	$\sum_i vf$	$u\sum_i vf$
		-2	-1	0	1	2	3					
2	-3			1				1	-3	9	0	0
3	-2		2			1		3	-6	12	0	0
4	-1	1	1	2	1			5	-5	5	-2	2
5	0	1	1	2	2			6	0	0	-1	0
6	1		1	2	3	3	1	10	10	10	11	11
7	2		1	3	4	3	1	12	24	48	12	24
8	3			2	2	4		8	24	72	10	30
9	4				1	3	1	5	20	80	10	40
f_v		2	6	12	13	14	3	50	64	236	40	107
vf_v		-4	-6	0	13	28	9	40				
v^2f_v		8	6	0	13	56	27	110				
$\sum_j uf$		-1	-2	9	20	31	7	64				
$v\sum_j uf$		2	2	0	20	62	21	107				

ತಾಳೆಗಳು

xನ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು 5 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $x-5 = u$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಇದರಂತೆಯೇ $y-5=v$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಕೋಷ್ಟಕ 2ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ u ಬೆಲೆಯನ್ನೂ 9ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಇದರ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಕಾಣಿಸಿದೆ. [ಗೊಂದಲವಾದೀತು ಎಂಬ ಶಂಕೆಯಿಂದ ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕಲಮುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ತೋರಿಸಿಲ್ಲ.]

ಈ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ uf_u, u^2f_u ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. (ಕಲಮುಗಳ 10, 11). ಹೀಗೆ ದೊರೆತ ಫಲಗಳು ಇಂತಿವೆ.

$$n = \Sigma f_u = 50; \quad \Sigma u f_u = 64 = T_u; \quad \Sigma u^2 f_u = 236.$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ vನ್ನು ಕುರಿತು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ, $\Sigma f_v = 50$, $\Sigma v f_v = 40 = T_v$ $\Sigma v^2 f_v = 110$, ಎಂಬ ಫಲನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

(ಕೋಷ್ಟಕದ ಕೆಳಭಾಗದ vf_v, v^2f_v ಎಂಬ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ನೋಡುವುದು.)

ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು ಇನ್ನು ಉಳಿದಿರುವುದು Σuvf ಇದರ ಬೆಲೆ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಹಂತಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. u ವಿವರ್ತದ ಬೆಲೆಯನ್ನು u_1ನಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟು, Σvf ನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿ. ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು u_1 ಇಂದ ಗುಣಿಸಲು $\Sigma_1 uvf$ ಎಂಬ ಆಂಶಿಕ ಸಮಾಕಲನದ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುವುದು. ಇಲ್ಲಿ $\sum_1$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಗೆ $u = u_1$ ಎಂಬ ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟು ಗಣನೆ ಮಾಡಿದ ಸಮಾಕಲನ ಎಂದರ್ಥ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $u = -1$ ಎಂಬ ಕೋಷ್ಟಕದ ಸಾಲನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಬೆಲೆಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ, ಅಂದರೆ $u = -1$ ಎಂಬ ಕಟ್ಟಿಗೆ ಒಳಪಟ್ಟಂತೆ vಯ ವಿಧೇಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ಹೀಗಿರುವುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 8·14

$u = -1$ ಇದ್ದಾಗ vಯ ವಿಧೇಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ

v	-2	-1	0	1	ಮೊತ್ತ
ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ	1	1	2	1	5
$v \times$ (ಆ. ಸಂ.)	-2	-1	0	1	-2

ಈ ಸಾಲಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ದೊರೆವ fvಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದರ ಮೇರೆಗೆ $\Sigma vf = -2$ ಎಂಬ ಬೆಲೆ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಈ ಸಾಲಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ uನ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯಾದ ದೊರೆವ -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ 2 ದೊರೆಯುವುದು. ಇದೇ ಈ ಸಾಲಿನಿಂದ ದೊರೆವ Σuvf ವಿನ ಬೆಲೆಯಾಗುವುದು. ವಿಧೇಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಗಳ Σvf ಮತ್ತು Σuvf ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 8·13ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಕಲಮುಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಕಲಮುಗಳ ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳು $\Sigma_i vf$ ಮತ್ತು $u_i\Sigma_i vf$ ಎಂದಿರುವುವು.

ಗಣನಾಕ್ರಮವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲು 8·14ನೇ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬೇರೆಯಾಗಿ ಬರೆದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಗಣನಾಕ್ರಮವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿ ಚೆನ್ನಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡ ಮೇಲೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಇಂಥ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬರೆಯುವ ಆಗತ್ಯವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

8·13ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಪ್ರತಿ ಸಾಲನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ Σvf ನ್ನು ಬಾಯಿ ಲೆಕ್ಕವಾಗಿಯೇ ಮಾಡಿ ಅಭೀಷ್ಟ ಫಲವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ ವಾಗುವುದು. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 8·13ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಉಪಾಂತ್ಯ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ (ಕೊನೆಯ ಕಲಮಿಗೆ ಹಿಂದಿನ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ) ಕಾಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಕಲಮಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು uನ ಅನು ಗುಣವಾದ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೊನೆಯ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಕಲಮಿನ ಮೊತ್ತವೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ Σuvf ನ ಬೆಲೆಯಾಗುವುದು. ಆದಾಗಿ, $\Sigma uvf =$ 107.

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, vಗೆ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು $\Sigma_1 uf$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಕೋಷ್ಟಕದ ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿಗೆ ಹಿಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂವಾದಿಯಾದ vಯ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣನ ಫಲವನ್ನು ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿ ನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೇ Σuvf. ಹೀಗಾಗಿ, ಎರಡು ಕಡೆ ಯಿಂದಲೂ ಈಗ Σuvf ವಿನ ಬೆಲೆ ಬಂದಿರುವುದು. ಇವೆರಡೂ ಸಮವಾಗಿದ್ದು ತಾಳೆ ಬಿದ್ದರೆ ಪ್ರಾಯಃ ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತಪ್ಪು ಏನೂ ತೂರಿಕೊಂಡಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯ ಬಹುದು. ಹಾಗೆ ತಾಳೆ ಬೀಳದಿದ್ದರೆ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತಪ್ಪು ಇದೆ ಎಂಬುದು ನಿಶ್ಚಯ.

ಪ್ರತಿಸಾಲಿನ ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ದೊರೆತ $\sum_1 vf$ ಎಂಬ ಆಂಶಿಕ ಸಮಾಕಲನದ ಮೊತ್ತವನ್ನು 12ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದೆ ಎಂದು ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಕಲಮಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಇದು ಕೋಷ್ಟಕದ $\sum vf$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು. ಈ ಮೊತ್ತ 40 ಇದೆ. ಅದು ಇಡೀ ಕೋಷ್ಟಕದ vf ಎಂಬ ಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ ವಾಗಿರಬೇಕು. ತಪ್ಪಿಲ್ಲದೆ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿರುವುದಕ್ಕೆ ಇದನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ತಾಳೆಯನ್ನಾಗಿ ಬಳಸಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, $\sum_1 uf$ ಎಂಬ ಸಾಲಿನ ಮೊತ್ತವು, ಕೋಷ್ಟಕದ $\sum uf$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಇದು 10ನೇ ಕಲಮಿನ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರ ಬೇಕು. ಇದು ಮೂರನೇ ತಾಳೆಯಾಗುವುದು. ಈ ಮೂರು ಬಗೆಯಾದ ತಾಳೆಗಳನ್ನೂ ಸರಿ ನೋಡಿದ ಮೇಲೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಲು ಮುಂದುವರಿಯ ಬಹುದು.

ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಲು 6·5ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದೆಂದು ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ. ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವಾಗ, ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸೂಚಿಸುವಷ್ಟು ಸಲ ಆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕೂಡ ಬೇಕು, ಅಥವಾ, ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ, Σ ಬಂದಿರುವೆಡೆಗಳಲ್ಲಿ f ಎಂಬುದನ್ನು ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆಗ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೀಡುವ ಸಮೀಕರಣವು ಈ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುವುದು.

$$r = \frac{\sum f\,xy - T_x \cdot T_y/n}{\sqrt{\sum f\,x^2 - T_x^2/n}\;\sqrt{\sum f\,y^2 - T_y^2/n}} \quad \text{.... (12·1)}$$

ಇಲ್ಲಿ x, yಗಳನ್ನು u, v ಎಂಬ ಚಲಕಗಳಿಗೆ ರೇಖೀಯ ರೂಪಾಂತರ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ, ಕೆಳಕಾಣಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ ಅಭೀಷ್ಟ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಕವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$r = \frac{\sum f\,uv - T_u\,T_v\,/n}{\sqrt{\sum f u^2 - T_u^{\,2}/n}\;\sqrt{\sum f v^2 - T_v^{\,2}/n}} \quad \text{.... (12·2)}$$

8·13ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ.

$$T_u^2/n = 81{\cdot}92\,;\; T_v^2/n = 32\,;\; T_uT_v/n = 51{\cdot}2$$

$$\sum uv\,f - T_uT_v/n = 107 - 51{\cdot}2 = 55{\cdot}8$$

$$\sum u^2 f - T_u^2/n = 236 - 81{\cdot}92 = 154{\cdot}08$$

$$\sum v^2 f - T_v^2/n = 110 - 32 = 78$$

$$\therefore\; r = \frac{55{\cdot}8}{\sqrt{154{\cdot}08 \times 78}} = 0{\cdot}51$$

ಆದುದರಿಂದ, x, yಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ $= 0{\cdot}51$

13 ಇಮ್ಮುಖ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ—ಗುಂಪೀಕರಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳು

ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇಮ್ಮುಖ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ಚಲಕದ ಹಲವು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ಒಂದೊಂದು ಗುಂಪಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂಥ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿದ್ದಾಗ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಈಗ ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

8·15ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಗಂಡ ಮತ್ತು ಹೆಂಡತಿಯ ವಯಸ್ಸಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದ 200 ದಂಪತಿಗಳ ವಿತರಣೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಗಂಡನ ವಯಸ್ಸನ್ನು x ಎಂತಲೂ ಹೆಂಡತಿಯ ವಯಸ್ಸನನ್ನು y ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದ ಅಂತರ $= 5$ ವರ್ಷ. ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ

ಸರಳತೆಯನ್ನು ತಂದುಕೊಳ್ಳಲು ಕೆಲವೊಂದು ಉಪಾಯಗಳಿವೆ. ಅನುಕೂಲವಾದ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಒಂದು ಉಪಾಯ. ವರ್ಗದ ಅಂತರವನ್ನು ಅಳತೆಯ ಒತ್ತೆ ಮಾನವನ್ನಾಗಿ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತೊಂದು ಉಪಾಯ. x – ನ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು 25–30 ವರ್ಗದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿಯೂ, ವರ್ಗದ ಅಂತರವನ್ನು ಅಳತೆಯ ಏಕ ಮಾನವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅಂದರೆ, $(x - 27{\cdot}5)/5 = u$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ಬಂದ u ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 8·15ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ತಲೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ yಯ ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲವನ್ನು 17·5 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು 5 ವರ್ಷಗಳನ್ನು yಯ ಒತ್ತೆ ಮಾನವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅಂದರೆ $(y - 175)/5 = v$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಬಹುದು. 8·13ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿ uvಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮೂರು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ತಾಳೆ ಬೀಳಬೇಕು. 8·15 ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಇವು ತಾಳೆ ಬಿದ್ದಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಮಾಡಿರುವ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಏನೂ ತಪ್ಪಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 8·15

ಗುಂಪೀಕರಿಸಿದ ಇಮ್ಮುಖ ವಿತರಣೆಯಿಂದ ಸಹಸಂಬಂಧದ ಗಣನೆ

y \ x	v \ u	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	f_v	vf_v	v^2f_v	$\Sigma_1 uf$	$v\Sigma_1 uf$
		-2	-1	0	1	2	3	4					
10-15	-1	2	12	4	1				19	-19	19	-15	15
15-20	0	1	44	38	7	1			91	0	0	-37	0
20-25	1		9	33	12	3	1		58	58	58	12	12
25-30	2		1	5	7	3	1	1	18	36	72	19	38
30-35	3			1	2	2	2	1	8	24	72	16	48
35-40	4					2	2	2	6	24	96	18	72
f_u		3	66	81	29	11	6	4	200	123	317	13	185
uf_u		-6	-66	0	29	22	18	16	13				
u^2f_u		12	66	0	29	44	54	64	269				
$\Sigma_1 vf$		-2	-1	42	31	23	-17	13	123				
$u_1\Sigma_1 vf$		4	1	0	31	46	51	52	185				

ಈಗ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಗಣನೆ :

$$\sum fu^2 - T_u^2/n = 269 - 13^2/200 = 268{\cdot}155$$

$$\sum fv^2 - T_v^2/n = 317 - 123^2/200 = 241{\cdot}355$$

$$\sum fuv - T_uT_v/n = 185 - 13{\cdot}123/200 = 177{\cdot}005$$

$$\therefore r_{uv} = \frac{177{\cdot}0}{\sqrt{268{\cdot}2 \times 241{\cdot}4}} = 0{\cdot}6958$$

ಆದುದರಿಂದ, 7.4ನೇ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ,

$$r_{xy} = r_{uv} = 0{\cdot}70 \text{ (ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ)}$$

14 ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಗುಣಧರ್ಮಗಳು

ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಮುಖ್ಯ ಗುಣಧರ್ಮಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದಾಗಿ ನಮೂದಿಸುತ್ತೇವೆ.

1. ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವು ಶುದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು ; ಇದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಆಯಾಮವೂ (dimension) ಇಲ್ಲ.

2. ಸಹಸಂಬಂಧವುಳ್ಳ ವಿವರ್ತಗಳೆರಡೂ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಹೆಚ್ಚಿದರೆ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಧನವಾಗಿರುವುದು. ಒಂದು ವಿವರ್ತವು ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಾಯಶಃ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ, ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಋಣವಾಗಿರುವುದು.

3. ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನೀಯುವ ಬೀಜಸಾಮ್ಯವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ, ಅದು x, yಗಳಲ್ಲಿ ಸಮ್ಮಿತವಾಗಿರುವುದು ತಿಳಿಯಬರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, x, y ಗಳನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ r ಗುಣಾಂಕದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ $r_{xy} = r_{yx}$ ಎಂದು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

4. ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಬೆಲೆ -1 ರಿಂದ $+1$ರ ವರೆಗಿನ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದು.

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$x - \bar{x} = X$ ಮತ್ತು $y - \bar{y} = Y$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇದರಿಂದಾಗಿ,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum X^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum Y^2 \text{ ಮತ್ತು } \sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum XY$$

ಈಗ
$$\frac{1}{n}\sum\left(\frac{X}{\sigma_x} - \frac{Y}{\sigma_y}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum\frac{X^2}{\sigma_x^2} + \frac{1}{n}\sum\frac{Y^2}{\sigma_y^2} - \frac{2}{n}\sum\frac{XY}{\sigma_x\sigma_y} \quad \ldots\ldots \quad (14{\cdot}1)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಬದಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವೂ ವರ್ಗವಾದುದರಿಂದ, ಅದು ಅನೃಣ (non-negative) ವಾಗಿರಬೇಕು ; ಅಂದರೆ, ಧನವಾಗಿರಬೇಕು ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ ಆ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೂ ಸಹ ಅನೃಣವಾಗಿರಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ $\sum(X/\sigma_x - Y/\sigma_y)^2 \geqslant 0$. ಬಲಬದಿಯ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, 1 ಮತ್ತು $-2r$ ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿವೆ; ಅಂದರೆ, ಬಲಬದಿ $= 2 - 2r = 2(1 - r)$. ಆದುದರಿಂದ $2(1 - r) \geqslant 0$, ಅಥವಾ $1 - r \geqslant 0$. $\therefore r \leqslant 1$. ಅಂದರೆ, r ಗುಣಾಂಕವು 1ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಲಾರದು. ಹಾಗೂ,

$$\frac{1}{n}\sum\left(\frac{X}{\sigma_x} + \frac{Y}{\sigma_y}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum\frac{X^2}{\sigma_x^2} + \frac{1}{n}\sum\frac{Y^2}{\sigma_y^2} + \frac{2}{n}\sum\frac{XY}{\sigma_x\sigma_y} \quad \ldots\ldots \quad (14{\cdot}2)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಎಡಬದಿಯು ಅನೃಣವಾಗಿರುವುದು, ಮತ್ತು ಬಲಬದಿಯು ಸರಳೀಕರಿಸಲು $1 + 1 + 2r$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ $2(1 + r)$ ಅನೃಣವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ, $1 + r \geqslant 0$. $\therefore r \geqslant -1$.

ಇದರಿಂದಾಗಿ $-1 \leqslant r \leqslant 1$; ಅಂದರೆ rನ ಬೆಲೆ -1 ರಿಂದ $+1$ ರ ವರೆಗಿನ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

5. x, y ಗಳ ಸಹವಿಚಲನೆ ಧನವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಧನವಾಗಿಯೂ, ಸಹವಿಚಲನೆ ಋಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಋಣವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದು.

6. ಚಲಕಗಳೆರಡೂ $ax + by + c = 0$ ಎಂಬ ರೇಖೀಯ ಸಮೀಕರಣ ದಿಂದ ಸಂಬದ್ಧವಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವು $+1$ ಅಥವಾ -1 ಇರುವುದು. ಈ ರೇಖೆಯ ಓಟ (slope) ಧನವಾಗಿದ್ದರೆ ಗುಣಾಂಕ ಧನವಾಗಿರುವುದು, ಓಟ ಋಣ ವಾಗಿದ್ದರೆ ಗುಣಾಂಕ ಋಣವಾಗಿರುವುದು.

7. x, y ವಿವರ್ತಗಳ ಅಳತೆಯ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನಾಗಲಿ, ಏಕ ಮಾನ ಗಳನ್ನಾಗಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಇದನ್ನೇ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಾಗಿ ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

x, y ವಿವರ್ತಗಳನ್ನು ರೇಖೀಯ ರೂಪಾಂತರದ ಮೂಲಕ u, v ಗಳಿಗೆ ಪರಿ ವರ್ತಿಸಿದರೆ u, v ಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ x, y ಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು.

8. x, y ಚಲಕಗಳು ಸಂಭವ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದ್ದರೆ (stochastically independent) ಅವುಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

15 ಸಮಾಶ್ರಯಣ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ 2ನೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ x, y ಎರಡು ವಿವರ್ತಗಳ ಅವೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆ ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಚದರಾವಣೆಯ ಪರಿಲೇಖವನ್ನು ರಚಿಸಿದೆವು (ಚಿತ್ರ 8.1) ಈ ವಿವರ್ತ ಗಳೆರಡೂ ಸಂಭವ ಚರಗಳಾಗಿರುವುವು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಗಣಿತ ಚಲಕ (mathematical variable) ಎಂದೂ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಸಂಭವ ಚರ ವೆಂದೂ ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. xನ್ನು ಗಣಿತ ಚಲಕವೆಂದೂ, yನ್ನು ಸಂಭವ ಚರವೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. xನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ yಯ ಹಲವಾರು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯಬಹುದು. ಈ ಬೆಲೆಗಳ ವಿತರಣೆಯೇ $x = x_i$ ಆದಾಗ yಯ ವಿಧೇಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x = x_i$ ಇದ್ದಾಗ, yಗೆ $y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, \ldots$ ಎಂಬ ಹಲವು ಬೆಲೆಗಳಿರುವುವು. ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು $\overline{y}_i$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ. $(x_i, \overline{y}_i)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅಂಕನ (plot) ಮಾಡಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ದೊರೆವ ವಕ್ರಕ್ಕೆ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ವಕ್ರ ಅಥವಾ ಪ್ರತೀಪಗಮನ ವಕ್ರ (regression curve) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ವಕ್ರವು ಸರಳ ರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆ (regression line) ಎಂದು ಕರೆಯು ತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಹಿಂಚಲನೆಯ ರೇಖೆ ಎಂತಲೂ ಕರೆಯುವುದುಂಟು. ಹಾಗೂ, ದತ್ತ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಹಾಳಿತವಾಗಿ $y = a + bx$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿದರೆ,

ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು xನ ಮೇಲಣ yಯ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು bನ್ನು xನ ಮೇಲಣ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ (regression coefficient) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

8·1ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಅಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ $y = a + bx$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಕನಿಷ್ಠ ತಮ ವರ್ಗತತ್ವದ ಮೇರೆಗೆ a, b ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ.

$$\sum a + b\sum x = \sum y \quad .... \quad (15{\cdot}1)$$

$$a\sum x + b\sum x^2 = \Sigma xy \quad .... \quad (15{\cdot}2)$$

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 8·5ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಆದೇಶಿಸಲು ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಕೆಳ ಕಾಣಿಸಿದ ರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತವೆ.

$$10a + 66b = 57 \quad .... \quad (15{\cdot}3)$$

$$66b + 472b = 393 \quad .... \quad (15{\cdot}4)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು, $a = 2{\cdot}655$, $b = 0{\cdot}4615$. ಕನಿಷ್ಠ ತಮ ವರ್ಗ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಮೇರೆಗೆ, ದತ್ತ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಪೂರ್ಣಿಸಿದ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y = 2{\cdot}655 + 0{\cdot}4615x \quad .... \quad (15{\cdot}5)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. xನ ಮೇಲೆ yಯ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕವು 0·4615 ಇರುವುದು. xನ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ 1 ಹೆಚ್ಚಳವಾದರೆ, yಯ ಬೆಲೆಯು ಪ್ರಾಯಿಕವಾಗಿ 0·4615 ಹೆಚ್ಚುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕವು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ 15·1 ಮತ್ತು 15·2ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು n ಇಂದ ಭಾಗಿಸಲು

$$a + b\bar{x} = \bar{y} \quad .... \quad (15{\cdot}6)$$

ಮತ್ತು $$a\bar{x} + b(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) = \sigma_{xy} + \bar{x}\,\bar{y} \quad .... \quad (15{\cdot}7)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವುವು.

15·6ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ, $(\bar{x}, \bar{y})$ ಬಿಂದು $y=a+bx$ ಎಂಬ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದಕಾರಣ ಈ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$y - \bar{y} = b(x - \bar{x}) \quad .... \quad (15{\cdot}8)$$

ಎಂತಲೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

15·6ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\bar{x}$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ 15·7ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಕಳೆಯಲು

$$b\sigma_x^2 = \sigma_{xy} \quad .... \quad (15{\cdot}9)$$

ಮತ್ತು

$$b = \sigma_{xy}/\sigma_x^2 \quad .... \quad (15{\cdot}10)$$

ಎಂಬ ಫಲಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, x, y ಗಳ ಸಹವಿಚಲನೆಯನ್ನು xನ ವಿಚಲನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ xನ ಮೇಲಣ yಯ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದು ಅತಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲವಾದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು. xನ ವಿಚಲನೆ σ_x^2 ಯಾವತ್ತೂ ಧನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, σ_{xy} ಮತ್ತು b ಇವೆರಡರ ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಒಂದೇಯಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ, ಸಹವಿಚಲನೆ ಧನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ ಧನವಾಗಿಯೂ, ಸಹವಿಚಲನೆ ಋಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ ಋಣವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದು. ಹಿಂದೆ (4·7)ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $\sigma_{xy} = r\sigma_x\sigma_y$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಸಹ ವಿಚಲನೆಯ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (15·10) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಲು

$$b = r\sigma_y/\sigma_x \quad .... \quad 15{\cdot}11$$

ಎಂಬ ಸಾಮ್ಯ ದೊರೆಯುವುದು. ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (15·8)ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ bಗೆ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೆಳಕಾಣಿಸಿದ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \quad .... \quad (15{\cdot}12)$$

ಮತ್ತು

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \quad .... \quad (15{\cdot}13)$$

16 ಆಗಣಕದ ವಿಚಲನೆ

ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವದ ಮೇರೆಗೆ,

$$S^2 = \Sigma(y - a - bx)^2 \quad .... \quad 16{\cdot}1$$

ಎಂಬ ವ್ಯತಿಲಕನಗಳ ವರ್ಗಯೋಗವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠತಮವನ್ನಾಗಿಸುವಂತೆ a, b ಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಹಾಗೆ ಆಯ್ದುಕೊಂಡಾಗ ಲಭಿಸುವ S^2 – ನ ಕನಿಷ್ಠತಮ ಬೆಲೆ ಏನೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯ ವಿಸ್ತರಣವನ್ನು ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪದಗಳಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಕನಿಷ್ಠತಮ S^2

$$= \Sigma[y(y - a - bx) - a(y - a - bx) - bx(y - a - bx)]$$

$$= \Sigma(y^2 - ay - bxy) - a\Sigma(y - a - bx) - b\Sigma(xy - ax - bx^2)$$

(15·1) ಮತ್ತು (15·2) ಸಮೀಕರಣಗಳ ದೆಸೆಯಿಂದ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಪದಗಳೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ

$$\text{ಕನಿಷ್ಠತಮ } S^2 = \sum y^2 - a\Sigma y - b\Sigma xy \quad .... \quad (16{\cdot}2)$$

ಹೀಗೆ ದೊರೆತ ಕನಿಷ್ಠತಮ S^2ನ್ನು n ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಲಬ್ಧಕ್ಕೆ yಯ ಆಗಣಕದ ವಿಚಲನೆ (variance of the estimate of y) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು σ_{ye}^2 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು S_y^2 ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸುವುದುಂಟು. ಆಯದರಿಂದ

$$S_y^2 = \sigma_{ye}^2 = \frac{1}{n}\,(\text{ಕನಿಷ್ಠತಮ } S^2) \quad .... \quad (16.3)$$

ಈಗ $\Sigma y = n\bar{y}$, $\Sigma y^2 = n(\sigma_y^2 + \bar{y}^2)$ ಮತ್ತು $\Sigma xy = n(\sigma_{xy} + \bar{x}\bar{y})$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 16·2ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಲು, ಬಲಬದಿಯು $n(\sigma_y^2 + \bar{y}^2) - an\bar{y} - bn(\sigma_{xy} + \bar{x}\bar{y})$ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು: $n(\sigma_y^2 - b\sigma_{xy}) — n\bar{y}(\bar{y} - a - b\bar{x})$. 15·6ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ದೆಸೆಯಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಪದ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ 16·2ನೇ ಸಮೀಕರಣ ಈ ರೂಪಕ್ಕಿಳಿಯುವುದು.

$$\sigma_{ye}^2 = \sigma_y^2 - b\sigma_{xy} \quad .... \quad (16{\cdot}4)$$

ಆದರೆ $\sigma_{xy} = r\sigma_x\sigma_y$ ಮತ್ತು $b = r\sigma_y/\sigma_x$. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು

$$\sigma_{ye}^2 = \sigma_y^2(1 - r^2) \quad .... \quad (16{\cdot}5)$$

ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಳೆಯುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಬದಿಯು ಅಸೃಣವಾಗಿರುವುದು; ಆದುದರಿಂದ r^2 ಇದರ ಬೆಲೆ 1ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಲಾರದು ; ಅಂದರೆ $-1 \leqslant r \leqslant 1$. ಇದು 14ನೇ ಪ್ರಕರಣದ 6ನೇ ವಿಭಾಗದ ಫಲದ ಮಾರ್ಗಾಂತರ ಸಾಧನೆ.

17 ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳು

x, y ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಬದ್ಧ ವಿವರ್ತಗಳಲ್ಲಿ xನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿಷ್ಕರ್ಷೆಮಾಡಿ yನ್ನು ಯದೃಚ್ಛಾ ಚಲಕವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ xನ ಮೇಲೆ yಯು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕವನ್ನೂ, ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ yಯು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿಗದಿ ಮಾಡಿ xನ್ನು ಸಂಭವ ಚರವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ yಯ ಮೇಲೆ xನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯನ್ನೂ, ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕವನ್ನೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಇದರಿಂದಾಗಿ, ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳು ಎರಡು ಇರುವುವು.

$$\text{ದತ್ತ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ} \quad x = a' + b'y' \quad .... \quad (17{\cdot}1)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿದರೆ ಇದೇ yಯು ಮೇಲಣ xನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯಾಗುವುದು. ಮತ್ತು b' ಎಂಬುದು xನ ಮೇಲಣ yಯು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕವಾಗುವುದು. ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗತತ್ವಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ a' ಮತ್ತು b'ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

$$\Sigma a' + b'\Sigma y = \Sigma x \quad .... \quad (17{\cdot}2)$$

$$a'\Sigma y + b'\Sigma y^2 = \Sigma xy \quad .... \quad (17{\cdot}3)$$

ಮೊದಲನೇ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು n ಇಂದ ಭಾಗಿಸಲು

$$a' + b'\overline{y} = \overline{x} \quad .... \quad (17{\cdot}4)$$

ಎಂಬ ಸಾಮ್ಯ ಸಿದ್ಧಿಸುವುದು. ಇದರಿಂದ $(\overline{x}, \overline{y})$ ಬಿಂದು ಈ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವುದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳೂ $(\overline{x}, \overline{y})$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ bನ್ನು ಕುರಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು 15·10 ಮತ್ತು 15·11ರಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅವಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ b'ನ್ನು ಕುರಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$$b' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad .... \quad (17{\cdot}5)$$

ಈಗ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಇಂತಿರುವುದು :

$$(x - \overline{x}) = r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}.(y - \overline{y}) \quad .... \quad (17{\cdot}6)$$

ಅಥವಾ

$$\frac{x - \overline{x}}{\sigma_x} = r\,\frac{y - \overline{y}}{\sigma_y} \quad .... \quad (17{\cdot}7)$$

ಇವುಗಳನ್ನು 15·12ನೇ ಮತ್ತು 15·13ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿ.

ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಪರಸ್ಪರ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳು $b = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $b' = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ ಇರುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಲು

$$bb' = r^2 \quad .... \quad (17{\cdot}8)$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದು ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ಫಲ. ಇದನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

1. ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವು ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕಗಳ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ (mean proportional) ಯಾಗಿರುವುದು.

2. ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವು ಎರಡೂ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮ (geometrical mean) ವಾಗಿರುವುದು.

8·5ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಅಭೀಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 17·2ನೇ ಮತ್ತು 17·3ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಈ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುವುವು.

$$10a' + 57b' = 66 \quad .... \quad (17{\cdot}9)$$

$$57a' + 343b' = 393 \quad .... \quad (17{\cdot}10)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು,

$$a' = 237/181 = 1{\cdot}309\,; \quad b' = 168/181 = 0{\cdot}9281$$

ಆದುದರಿಂದ xನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$x = 1{\cdot}309 + 0{\cdot}9281y \qquad \ldots\ (17{\cdot}11)$$

ಹಾಗೂ yಯ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ (15·5) ರಂತೆ

$$y = 2{\cdot}655 + 0{\cdot}4615x \qquad \ldots\ (17{\cdot}12)$$

ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕಗಳ ಗುಣನ ಫಲ

$bb' = 0{\cdot}4615 \times 0{\cdot}9281 = 0{\cdot}4284$ (ನಾಲ್ಕು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ) x, yಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ $r = 0{\cdot}6545$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ, $r^2 = (0{\cdot}6545)^2 = 0{\cdot}4284$ (ನಾಲ್ಕು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ). ಇದರಿಂದ, $bb' = r^2$ ಎಂಬ ಸಾಮ್ಯವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿದಂತಾಯಿತು. ಹಾಗೂ,

$$x\text{ನ ಆಗಣನದ ವಿಚಲನೆ} = S_x^2 = \sigma_{xe}^2 = \sigma_x^2(1 - r^2) \qquad \ldots\ (17{\cdot}13)$$

ಇದು 16·5ನೇ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಸಮೀಕರಣ.

18 ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ b, b' ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $b_{y,x}$ ಮತ್ತು $b_{x,y}$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವುದು ರೂಢಿ. ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು

$$y - \bar{y} = b_{y,x}(x - \bar{x}) \qquad \ldots\ (18{\cdot}1)$$

ಮತ್ತು

$$x - \bar{x} = b_{x,y}(y - \bar{y}) \qquad \ldots\ (18{\cdot}2)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಗುಂಪೀಕರಿಸಿದ ಇಮ್ಮಡಿ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆಯ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಣಿಸಿದ ಮೇಲೆ, ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕೋಷ್ಟಕ 8·15ರನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $(x - 27{\cdot}5)/5 = u$, ಮತ್ತು $(y - 17{\cdot}5)/5 = v$ ಎಂದು ಆದೇಶಮಾಡಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ. ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ,

$n\sigma_u^2 = \Sigma f_u^2 - T_u^2/n = 268{\cdot}155$; ಇದನ್ನು S_u^2 ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

$n\sigma_v^2 = \Sigma f v^2 - T_v^2/n = 241{\cdot}355$; ಇದನ್ನು S_v^2 ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ.
$n\sigma_{uv} = \Sigma fuv - T_u T_v/n = 177{\cdot}00$; ಇದನ್ನು S_{uv} ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.
ಆದುದರಿಂದ (15·9)ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ

$$b_{u.v} = \frac{\sigma_{uv}}{\sigma_u^2}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಬಲಬದಿಯು S_{uv}/S_u^2ಗೆ ಸಮ ; ಆದುದರಿಂದ

$$b_{v.u} = \frac{S_{uv}}{S_u^2} = \frac{177{\cdot}00}{268{\cdot}155}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಿಂದ $b_{v.u}$ನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಬಹುದು. ಹಾಗೆ ಗಣಿಸಿ, $b_{v.u} = 0{\cdot}66$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈಗ

$$v - \bar{v} = 0{\cdot}66(u - \bar{u}) \qquad \text{.... (18·3)}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು x, yಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ,

$$\frac{y - \bar{y}}{5} = 0{\cdot}66\,\frac{x - \bar{x}}{5} \qquad \text{.... (18·4)}$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಆದರೆ, $\bar{x} = 5\bar{u} = 0{\cdot}325$; $\bar{y} = 5\bar{v} = 3{\cdot}075$ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಸರಳೀಕರಿಸಲು xನ ಮೇಲಣ yಯ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y = 0{\cdot}66x + 2{\cdot}86 \qquad \text{.... (18·5)}$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ $b_{u.v} = S_{uv}/S_v^2 = 177{\cdot}00/241{\cdot}355 = 0{\cdot}73$ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಹೀಗಿರುವುದು.

$$u - \bar{u} = 0{\cdot}73(v - \bar{v}), \text{ ಅಥವಾ } x - \bar{x} = 0{\cdot}73(y - \bar{y})$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಸರಳೀಕರಿಸಲು,

$$x = 0{\cdot}73y - 1{\cdot}92 \qquad \text{.... (18·6)}$$

19 ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯಿಂದ ಅಂದಾಜು

ಸಹಸಂಬಂಧವುಳ್ಳ x, y ಎಂಬ ಎರಡು ವಿವರ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಬೆಲೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದು ಮತ್ತೊಂದರ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 8.15ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಬ್ಬ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿನ ಗಂಡನ ವಯಸ್ಸು 42 ಇದೆ ಎನ್ನಿ. ಹೆಂಡತಿಯ ವಯಸ್ಸು ಏನೆಂದು ಗೊತ್ತಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೆ 18.5ನೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಆಶ್ರಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x = 42$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ yಯ ಬೆಲೆ $0.66 \times 42 + 2.86 = 30.58$. ಇಂತು ಆ ಹೆಂಗಸಿನ ವಯಸ್ಸು ಪ್ರಾಯಃ 30.58 ವರ್ಷ ಇರಬಹುದೆಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವಾಸ್ತವವಾದ ಬೆಲೆ ಇದರಿಂದ ಭಿನ್ನವಾಗಿರಬಹುದು.

$x = 42$ ಇದ್ದಾಗ yಯ ವಿಧೇಯ ವಿತರಣೆಯಿಂದಲೂ ಈ ವಯಸ್ಸನ್ನು ಅಂದಾಜುಮಾಡಬಹುದು. ಕೋಷ್ಟಕದ 8ನೇ ಕಲಮಿನಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಮಾಹಿತಿ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಗಂಡನ ವಯಸ್ಸು ಸರಾಸರಿ 42.5 ಇರುವ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಂಡತಿಯ ವಯಸ್ಸಿನ ವಿತರಣೆ ಈ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆ ವಿಧೇಯ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ ಹೀಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 18.16

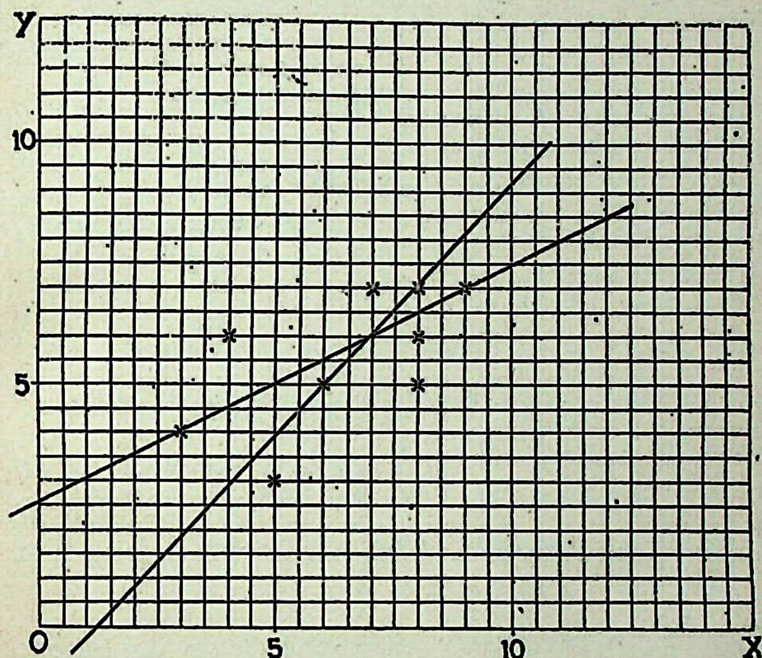
ಗಂಡನ ವಯಸ್ಸು 42.5 ಇದ್ದಾಗ ಹೆಂಡತಿಯ ವಯಸ್ಸಿನ ವಿಧೇಯ ವಿತರಣೆ

ಹೆಂಡತಿಯ ವಯಸ್ಸು y	20–25	25–30	30–35	35–40
ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ	1	1	2	2

ಗುಂಪಿನ ಮಧ್ಯಮ ಬೆಲೆಗಳನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದರೆ ಈ ವಿತರಣೆಯ ಮಧ್ಯಮ $190 \div 6 = 31.6$ ಬರುತ್ತದೆ. ಹಿಂದೆ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಮಾಡಿದ ಅಂದಾಜಿಗೂ ಇದಕ್ಕೂ ಸುಮಾರು ಒಂದು ವರ್ಷದಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದ್ದೇ ಇರುವುದು.

20 ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳ ಆಲೇಖ

ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ ಮೇಲೆ ಅವುಗಳ ಆಲೇಖ (graph) ವನ್ನೂ ಬರೆಯಬಹುದು. 8·1ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನೂ, (17·11)ನೇ ಮತ್ತು (17·12)ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳನ್ನೂ 8·2ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 8.2. ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳು

ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳೆರಡೂ $(\bar{x}, \bar{y})$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. 15·11ನೇ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಓಟ (slope) $m = r \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ಇರುವುದು ಮತ್ತು 17·5ನೇ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ xನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯ ಓಟ $m' = \dfrac{1}{r} \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ಇರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ, ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಣ ಕೋನ θ ಇದ್ದರೆ,

$$\tan \theta = \frac{m' - m}{1 + mm'} = \frac{\frac{1}{r}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}{1 + \frac{1}{r}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}$$

$$= \frac{1 - r^2}{r} \cdot \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad \ldots\ldots \quad (20\cdot1)$$

x, yಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ $+1$ ಅಥವಾ -1 ಇದ್ದರೆ, θ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು. ಆಗ ಎರಡು ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಐಕ್ಯವಾಗುವುವು. ಹಾಗೂ, x, yಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ, $\tan \theta = \infty$ ಆಗುವುದು, ಮತ್ತು $\theta = 90°$ ಆಗುವುದು ; ಅಂದರೆ, ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುವು.

ಅಭ್ಯಾಸ 8·1

1 ಒಂದು ಗಿಡದಿಂದ ಆಯ್ದ ಎಲೆಗಳ ಉದ್ದ ಅಗಲಗಳು ಈ ರೀತಿ ಇದ್ದವು.

ಉದ್ದ (ಮಿ.ಮೀ.)	91	84	74	44	88	68	95	61
ಅಗಲ (ಮಿ.ಮೀ.)	70	74	63	38	77	52	84	48

ಚದರಾವಣೆಯ ಪರಿಲೇಖವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಸಹಸಂಬಂಧಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2 ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ (ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ) ಸಹಸಂಬಂಧಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	50	50	55	60	65	65	65	60	60	50
y	11	13	14	16	16	15	15	14	13	13

(ಮೈಸೂರು ಪಿ.ಯು.ಸಿ)

3 ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಂದ x, y ಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x:	5	6	7	7	8	9	11	12	13
y:	7	8	4	8	12	10	10	9	10

4 ಗಂಡನ ವಯಸ್ಸನ್ನೂ (x), ಹೆಂಡತಿಯ ವಯಸ್ಸನ್ನೂ (y) ಇಲ್ಲಿ ಜೊತೆ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇವೆರಡು ಚಲಕಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x:	22	24	26	26	27	28	29	30	31	32	34	35	36	37
y:	18	20	20	24	22	27	21	29	27	27	27	31	30	32

(ಅಣ್ಣಾಮಲೆ ವಿ. ವಿ.)

5 ಹತ್ತು ಸಿಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ತೂಕ (y) ಮತ್ತು ಬಲ ತೊಡೆಯ ಅಳತೆ (x) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. x, yಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. xನ ಬೆಲೆ ದತ್ತವಾದಾಗ yನ್ನು ಅಂದಾಜುಮಾಡುವ ರೇಖೀಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಮದ್ರಾಸ್ ವಿ. ವಿ.)

y (ಪೌಂಡುಗಳಲ್ಲಿ)	139	117	150	166	122
x (ಇಂಚುಗಳಲ್ಲಿ)	20.0	19 0	20·4	24·0	19·5
y (ಪೌಂಡುಗಳಲ್ಲಿ)	119	146	137	174	141
x (ಇಂಚುಗಳಲ್ಲಿ)	19·5	22·2	21·5	24·2	21·2

6 ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ x, yಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನೂ, ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

y: | x:	4	5	6	7	8
12	3	4	2	..	..
13	4	8	8	2	..
14	..	7	12	8	4
15	..	3	8	8	5
16	..	..	3	5	6

(ಅಣ್ಣಾಮಲೈ ವಿ.ವಿ.)

7 ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದ್ವಿಚರ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ : (ಮೈಸೂರು ಪಿ.ಯು.ಸಿ.)

y	x: 5	10	15	20
10	10	3	..	..
15	5	7	8	3
20	..	15	20	11
25	..	..	12	6

8 ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. yಯ ಮೇಲಣ xನ ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, ಹಾಗೂ $y = 35$ ಇದ್ದಾಗ xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜುಮಾಡಿರಿ.

y	x: 10	20	30	40	50
20	4	4	10	..	..
30	2	5	9	4	..
40	..	6	15	10	4
50	..	1	7	12	3
60	..	..	5	8	2

9 ಕೆಳಕಂಡ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ x, yಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $x = 20$ ಇದ್ದಾಗ, yಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಾಣಿರಿ. ಹಾಗೂ yಯ ಆಗಣಕದ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x \ y	5	10	15	20	25
3	..	..	..	9	15
8	..	..	10	11	..
13	..	7	9	4	..
18	..	13	5	..	..
23	14	3	..	..	..

10 ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ x, y ಗಳ ಸಹಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸಮಾಶ್ರಯಣ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

y	x : 70-74	75-79	80-84	85-89	90-94
65-69	2	5	1	..	..
70-74	3	8	6	4	1
75-79	1	9	8	6	2
80-84	..	6	10	7	5
85-89	..	1	3	8	4

ಉತ್ತರ: 0.52

11 ಈ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಗಿರಣಿ ಕಾರ್ಮಿಕರ ತಿಂಗಳ ಗಳಿಕೆ x ರೂ ಮತ್ತು ಹಾಲಿಗಾಗಿ ಶೇಕಡಾವಾರು ವೆಚ್ಚ y ಕೊಟ್ಟಿದೆ. x, y ಗಳಿಗಿರುವ ಸಹಸಂಬಂಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿರಿ.

(ಪಂಜಾಬ್ ವಿ. ವಿ.)

x \ y	8	11	14	17	20	23	26
30	1	2	..	..	..	..	..
60	3	4	1	..	..	..	..
90	4	3	2	5	3	..	..
120	..	1	7	6	5	2	..
150	..	..	2	4	7	7	4
180	..	..	..	2	5	9	4
210	..	..	..	..	2	3	2

ಅಧ್ಯಾಯ 9

ತೋರಂಕಗಳು

(Index Numbers)

1 ತೋರಂಕಗಳ ಉದ್ದೇಶ

ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ಔದ್ಯೋಗಿಕ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಲಕಾಲಕ್ಕೆ ಆಗುವ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಅಗತ್ಯ ಒದಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 1970ನೇ ಇಸ್ವಿಯಿಂದ 1973ರ ವರೆಗಿನ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಕಿ, ರಾಗಿ ಮೊದಲಾದ ಧಾನ್ಯಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಹೇಗೆ ಹೆಚ್ಚಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಜೀವನಕ್ಕೆ

ಬೇಕಾದ ಪಡಿ ಪದಾರ್ಥಗಳ ಧಾರಣೆವಾಸಿಗಳು ಎಷ್ಟು ಏರಿಕೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಸರಕಾರಿ ನೌಕರರ ತುಟ್ಟಿಭತ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕಾದೀತು. ಹೀಗೆ ಕಾಲಕಾಲಕ್ಕೆ ಆಗತಕ್ಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಬೇಕಾದ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಪದೇ ಪದೇ ಒದಗುತ್ತಲೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಾಬನ್ನು ಕುರಿತು ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಇದು ಕಷ್ಟಸಾಧ್ಯವಾದ ಕೆಲಸವೇನೂ ಅಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ 1965–66ನೇ ಇಸ್ವಿಯಲ್ಲಿ ಅಕ್ಕಿಯ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಪ್ರಮಾಣ 1240 ಸಾವಿರ ಮೆಟ್ರಿಕ್ ಟನ್‌ಗಳು. 1966-67ರಲ್ಲಿ 1650 ಸಾವಿರ ಮೆಟ್ರಿಕ್ ಟನ್‌ಗಳಿಗೆ ಏರಿತು ಮತ್ತು 1967-68ರಲ್ಲಿ 1251 ಸಾವಿರ ಮೆಟ್ರಿಕ್ ಟನ್‌ಗಳಿಗೆ ಇಳಿಯಿತು. ಈ ಒಂದು ಧ್ಯಾನದ ಉತ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕುರಿತ ಈ ಮಾಹಿತಿಯಿಂದ ನಮ್ಮ ಅಭೀಷ್ಟ ಪೂರೈಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇತರ ಆಹಾರ ಧಾನ್ಯಗಳ ಮತ್ತು ವ್ಯವಸಾಯದ ಅನ್ಯ ವಸ್ತುಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಗಳು ವರ್ಷ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವುದು, ಕೈಗಾರಿಕೆಯ ಸಿದ್ಧ ವಸ್ತುಗಳ ಮತ್ತು ಗಿರಣಿಗಳಲ್ಲಿ ತಯಾರಾದ ಸರಕುಗಳ ಪ್ರಮಾಣ ಹೇಗೆ ಮಾರ್ಪಾಡಾಗುತ್ತಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಿದ ಹೊರತು ಆರ್ಥಿಕ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿ ಅಳವಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಹಲವಾರು ವಸ್ತುಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿ, ಧಾರಣೆ ಮೊದಲಾದವುಗಳ ಏರಿಳಿತವನ್ನು ತಿಳಿದು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಕಷ್ಟತರವಾದ ಕೆಲಸವೇ. ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಮ್ಮೆಲೆ ಗ್ರಹಿಸುವುದು ಮನಸ್ಸಿಗೆ ಆಗದ ಕೆಲಸ. ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಈ ಜಟಿಲ ವ್ಯೂಹದ ಸ್ವರೂಪ ನಮ್ಮ ಗ್ರಹಿಕೆಗೆ ಬರುವಂತೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ತೋರಂಕ (Index numbers) ಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವರ್ಷವನ್ನು ಮೂಲ ವರ್ಷವೆಂದು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ಆ ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಮಾನವನ್ನು 100 ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟೆಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ತೋರಂಕವೆಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು ಸೂಚ್ಯಂಕವೆಂದೂ ಹೇಳುವರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1965-66ನೇ ಇಸ್ವಿಯನ್ನು ಆಧಾರ ವರ್ಷವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಆ ವರ್ಷದ ಅಕ್ಕಿಯ ಉತ್ಪತ್ತಿ 1240 ಸಹಸ್ರ ಮೆಟ್ರಿಕ್ ಟನ್‌ಗಳು. ಮುಂದಿನ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪತ್ತಿ 1650 ಸಹಸ್ರ ಮೆಟ್ರಿಕ್ ಟನ್‌ಗಳು. ಇದನ್ನು 1240ರ ಶೇಕಡವಾರು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲು 133 ಆಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಸಂಬಂಧಕ (relative) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು 1966-67ನೇ ಇಸ್ವಿಯ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ತೋರಂಕ (ಆಧಾರ ವರ್ಷ 1965–66). ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಗೂ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 9.1ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 9.1

ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ಅಕ್ಕಿ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ತೋರಂಕ

ವರ್ಷ	ಉತ್ಪತ್ತಿ 000 ಮೆ. ಟನ್	ಸರಳ ತೋರಂಕ (ಸಂಬಂಧಕ)
(1)	(2)	(3)
1965-66	1240	100
1966-67	1650	133
1967-68	1251	101
1968-69	2029	164
1969-70	2117	171
1970-71	1953	157

ಇದೇ ರೀತಿ ಇತರ ಧಾನ್ಯಗಳ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನುಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಬಹುದು. ಈ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ, ಒಂದು ಧಾನ್ಯದ ಉತ್ಪತ್ತಿಯು ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಗತಿ ಹೊಂದಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಹಾಗೂ ಹಲವಾರು ಸರಕುಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಗತಿಗಳನ್ನು ತುಲನೆಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವುದು. 9.2ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಧಾನ್ಯಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಈ ಕೋಷ್ಟಕದ ಅಂಕಿಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ 1964-65ರಲ್ಲಿ ಅಕ್ಕಿ ಜೋಳಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದೆಂದೂ ಗೋಧಿಯ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಬಹಳ ಹೆಚ್ಚಿರುವುದೆಂದೂ ಅರಿವಾಗುತ್ತದೆ. ಬಾಜ್ರದ ಬೆಳೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಮುಂದಿನ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಬಹಳ ಮಾರ್ಪಾಟಾಗಿದೆ. ಅಕ್ಕಿಯ ಬೆಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ರಾಗಿ, ಗೋಧಿಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಯೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ, ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಆಹಾರ

ಕೋಷ್ಟಕ ೯.೨ : ವಿವಿಧ ಧಾನ್ಯಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ತೋರಂಕಗಳು

(1959–1962 ಈ ಮೂರು ವರ್ಷದ ಸರಾಸರಿ ಉತ್ಪತ್ತಿ = 100)

ಧಾನ್ಯಗಳು	1964-65	1965-66	1966-67	1967-68	1968-69	1969-70
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
ಅಕ್ಕಿ	125·6	89·0	118·4	89·8	145·5	164·2
ಜೋಳ	135·4	114·4	114·3	115 5	144·2	157·2
ರಾಗಿ	105·4	41·5	86·8	69·5	65·0	106·3
ಬಾಜ್ರ	85·7	109·9	130·4	148·2	136·6	202·6
ಗೋಧಿ	154·3	67·2	58·6	150·0	224·2	194·2
ಸರಾಸರಿ	121·2	84·2	101·7	96·8	143·1	164·5

Source : **Statistical Abstract of Mysore, 1970–71 (p. 33)**

ಧಾನ್ಯಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಮನವರಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಒಟ್ಟಾರೆ ಧಾನ್ಯಗಳ ತೋರಂಕವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಹಲವು ಚಲಕಗಳ, ವಿವಿಧ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ತೋರಂಕವು ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. ಇದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಮರ್ಶಿಸೋಣ.

2 ತೋರಂಕದ ಸ್ವರೂಪ:

ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಏರಿಳಿತವನ್ನು ಒಂದು ನಿಗದಿಯಾದ ಮೂಲ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆಯ ಶೇಕಡಾವಾರು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದೆಂದು ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ. ಇಂಥ ಹಲವು ಚಲಕಗಳಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಒಟ್ಟಾರೆ ಆಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಈ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 9.2ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿರುವ ಧಾನ್ಯಗಳ ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ ಬದಲಾವಣೆಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. 1964-65ನೇ ಇಸ್ವಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಈ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಸರಾಸರಿ 121.2ರಷ್ಟು ಈ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಒಟ್ಟಾರೆ ಧಾನ್ಯಗಳ ತೋರಂಕವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇದರಂತೆಯೇ 1965-66ರಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಶೇಕಡಾ 84.2ಕ್ಕೆ ಕುಗ್ಗಿದೆಯೆಂದಲೂ ಮತ್ತೆ 1966-67ರಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಶೇಕಡಾ 101.7ರಷ್ಟು ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಯಿತು, ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕುಂದುಕೊರತೆಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದಲ್ಲದೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ತಿದ್ದಿ ಸರಿಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನೂ ಸಹ ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು.

3 ಯಾವ ಸರಾಸರಿ ?

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ಒಟ್ಟಾರೆ ತೋರಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಹಲವಾರು ಸರಾಸರಿಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನು ಬಳಸುವುದು ? ಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು, ಅಂದರೆ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದೇ ? ಸರಳ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದೇ ? ಅಥವಾ ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದೇ ? ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದೇ ? ಅರ್ಧಕವನ್ನು ಬಳಸುವುದೇ ? ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದೇ ? ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಏಳುತ್ತವೆ. ಹಾಗೂ ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ; ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಬಳಸುವುದೇ

ಅಥವಾ ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕದೆ ಮೂಲರಾಶಿಗಳನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಗಣಿಸಿ ಅದರಿಂದ ಶೇಕಡಾವಾರು ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದೇ ಎಂಬುದನ್ನೆಲ್ಲಾ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ವಿಚಾರಮಾಡಿ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕ್ಕೆ ಬರಬೇಕು.

4 ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮ

ದತ್ತ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಅಥವಾ ರಾಶಿಗಳ ಮಧ್ಯಮ ಅಥವಾ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಆ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಮಹತ್ವ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕಾದೀತು. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ವಿಶದಪಡಿಸಬಹುದು.

ಕಾಮಣ್ಣ ಮತ್ತು ಸೋಮಣ್ಣ ಎಂಬುವರು ಬಿ.ಎ. ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ ಎನ್ನಿ.

ಕೋಷ್ಟಕ 9.3: ಸಾಮಾನ್ಯ ಸರಾಸರಿ

ವಿಷಯ	ಕಾಮಣ್ಣ ಪಡೆದ ಅಂಕ %	ಸೋಮಣ್ಣ ಪಡೆದ ಅಂಕ %
(1)	(2)	(3)
ಕನ್ನಡ	45	70
ಇಂಗ್ಲಿಷ್	40	36
ಗಣಿತ	54	45
ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	61	55
ಮೊತ್ತ	200	206
ಸರಾಸರಿ	50	51·5

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಂ. ಎ. ತರಗತಿಗೆ ಸೇರಲು ಇಬ್ಬರೂ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳಾಗಿದ್ದಾರೆ ಎನ್ನಿ. ಬಿ. ಎ. ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ ನಾಲ್ಕು ವಿಷಯಗಳಿಗೂ, ಸಮಾನ ಮಹತ್ವ ಕೊಟ್ಟಲ್ಲಿ ಸೋಮಣ್ಣನು ಮೇಲಾದವನು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಅವನಿಗೆ ಮೊದಲು ಪ್ರವೇಶ ದೊರೆಯುವುದು. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಂ. ಎ. ತರಗತಿಗೆ ಸೇರಲು ಅರ್ಹತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಾಗ, ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಮಹತ್ವ ಕೊಡುವುದು ಸಹಜ. ಅದರಂತೆ ಈ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಇಮ್ಮಡಿ ಮಹತ್ವ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ ಎನ್ನುವಾ. ಇಂಗ್ಲಿಷ್, ಕನ್ನಡಗಳಿಗೆ ನೂರು ನೂರು ಅಂಕಗಳನ್ನಿಟ್ಟರೆ, ಗಣಿತ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂರು, ಇನ್ನೂರು ಅಂಕಗಳನ್ನಿಡಲಾಗುವುದು. ಆಗ ಅವರು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳು ಹೀಗಿರುವುವು.

ಕೋಷ್ಟಕ 9·4: ಭಾರಿತ ಸರಾಸರಿಯ ಗಣನೆ

ವಿಷಯ	ಒಟ್ಟು	ಕಾಮಣ್ಣ ಪಡೆದ ಅಂಕ	ಸೋಮಣ್ಣ ಪಡೆದ ಅಂಕ
(1)	(2)	(3)	(4)
ಕನ್ನಡ	100	45	70
ಇಂಗ್ಲಿಷ್	100	40	36
ಗಣಿತ	200	108	90
ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	200	122	110
ಮೊತ್ತ	600	315	306
ಸರಾಸರಿ	100	52·5	51·0

ಈಗ ನೋಡಿದರೆ ಕಾಮಣ್ಣನು ಪಡೆದಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು : ಸೋಮಣ್ಣನು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಎಲ್ಲ ವಿಷಯಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ಸಮನಾದ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಇತ್ತಾಗ ಕಾಮಣ್ಣನ

ಸರಾಸರಿ ಅಂಕ 50% ಇತ್ತು. ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಎರಡರಷ್ಟು ಮಹತ್ವ ನೀಡಿದಾಗ ಕಾಮಣ್ಣನು ಪಡೆದ ಸರಾಸರಿ ಅಂಕ 52·5% ಈ ಸರಾಸರಿಗೆ ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮ ಎಂದು ಹೆಸರು. ವಿಷಯಗಳ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಭಾರ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಮಹತ್ವ ಕೊಟ್ಟರೆ ಭಾರಗಳೆಲ್ಲ ಸಮ ವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಸಮಾನ ಭಾರಗಳ ಮಧ್ಯಮಕ್ಕೆ ಸರಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮ ಅಥವಾ ಅಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮ (unweighted mean) ಎಂದು ಹೆಸರು.

9·3ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಪ್ರಕಾರ ಕಾಮಣ್ಣ ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ : 45, 40, 54, 61. ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಇಮ್ಮಡಿ ಭಾರಕೊಡಬೇಕಾದರೆ ಈ ನಾಲ್ಕು ವಿಷಯಗಳಿಗೂ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಭಾರಗಳನ್ನು 1, 1, 2, 2, ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಕಾಮಣ್ಣನು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮ

$$= \frac{1\times45+1\times40+2\times54+2\times61}{1+1+2+4} = \frac{315}{6} = 52{\cdot}5$$

ಇದರಂತೆಯೇ ಸೋಮಣ್ಣನು ಪಡೆದ ಅಂಕಗಳ ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮ

$$= \frac{1\times70+1\times36+2\times45+2\times55}{1+1+2+2} = \frac{306}{6} = 51$$

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ ಎಂಬ ಆವೇಕ್ಷಣೆ ಗಳಿದ್ದು, ಇವಕ್ಕೆ ಹಚ್ಚುವ ಭಾರಗಳು $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ ಇದ್ದರೆ, ಈ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮ

$$= \frac{w_1X_1 + w_2X_2 + \cdots + w_nX_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} \quad \ldots\ (4{\cdot}1)$$

ಭಾರಗಳೆಲ್ಲ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಧಾರಣ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮ ದೊರೆಯುವುದು.

9·2ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಇದನ್ನು 9·5ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಯಾವ ಭಾರಗಳನ್ನು ಬಳಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಈ ಕೋಷ್ಟಕ ದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅಕ್ಕಿ, ಜೋಳ ಇವು ರಾಜ್ಯದ ಮುಖ್ಯಬೆಳೆಗಳಾದುದರಿಂದ ಇವಕ್ಕೆ ಮಹತ್ವ ಹೆಚ್ಚು ; ಇದರ ಸಲುವಾಗಿ ಇದರ ಭಾರಗಳೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿವೆ. ಈ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಧಾನ್ಯಗಳ ರಾಶಿ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣದ ತೋರಂಕಗಳು(quantity index numbers) ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 9.5 : ಧಾನ್ಯಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಭಾರಿತ ತೋರಂಕದ ಗಣನೆ

ಧಾನ್ಯಗಳು	ಭಾರಗಳು	1964–65	1965–66	1966–67	1967–68	1968–69	1969–70
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
ಅಕ್ಕಿ	50	125·6	89·0	118·4	89·8	145·5	164·2
ಜೋಳ	27	135·4	114·4	114·3	115·5	144·2	157·2
ರಾಗಿ	19	105·1	41·5	86·8	69·5	65·0	106·3
ಬಾಜ್ರ	2	85·7	108·9	130·4	148·2	136·6	202·6
ಗೋಧಿ	2	154·3	67·2	58·6	150·0	224·2	194·2
ಸಮಾನಾಂತರ ಮಧ್ಯಮ		121·2	84·2	101·7	96·8	143·1	164·5
ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮ		124·1	86·8	110·3	95·3	131·3	152·6

ಸಾಮಾನ್ಯ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವುದು ಸುಲಭ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮಧ್ಯಮವು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಪರಿಚಿತವಾದುದು. ಆದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಬಳಸಿ ತೋರಂಕವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು ಸುಗಮ ಕೆಲಸ. ಆದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳ ಮಹತ್ವಕ್ಕೆ ತಕ್ಕ ಭಾರಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಿಲ್ಲವಾದುದರಿಂದ ಇದು ಅಷ್ಟು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಪ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬೆಳೆವ ಬಾಜ್ರ, ಗೋಧಿ ಇವುಗಳ ಹೆಚ್ಚುವಳಿಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮದ ಬೆಲೆಯೂ ವಿಪರೀತವಾಗಿ ಏರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 1969-70ರಲ್ಲಿ ಬಾಜ್ರ ಮತ್ತು ಗೋಧಿಯ ಬೆಳೆಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮಧ್ಯಮದ ತೋರಂಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಉತ್ಪತ್ತಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವಂತೆ, ಮಿಥ್ಯಾಭಾವನೆ ಮೂಡಲು ಅವಕಾಶವಿದೆ. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಮೇಲು.

ಆದರೆ, ಯಾವ ಭಾರಗಳನ್ನು ಬಳಸಬೇಕೆಂಬುದು ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಭಾರಗಳು ಆಯಾ ಸರಕಿನ ಮಹತ್ವಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿರಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಮಾತ್ರ ಎಲ್ಲರೂ ಒಪ್ಪುವರು. ಸರಕುಗಳ ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಪರಿವರ್ತನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಭಾರಗಳನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಪರಿವರ್ತನ ಮೌಲ್ಯವೆಂದರೆ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ಧಾರಣೆ ಇವುಗಳ ಗುಣನ ಫಲ. ಇವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವಾಗಲೂ ಭಾರಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು. $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ ಎಂಬ ಧನರಾಶಿಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು $\overline{X_g}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

$$\overline{X_g} = (X_1, X_2, X_3, \cdots X_n)^{\frac{1}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (4{\cdot}2)$$

ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ದತ್ತರಾಶಿಗಳ ಸರಗುಣಿತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದರ n ಘಾತ ಮೂಲವನ್ನು ಗಣಿಸಿದರೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮ ದೊರೆಯುವುದು. ಲಘುಗಣಕದ (ಲಾಗರಿಥಂ) ಸಹಾಯದಿಂದ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದು.

$$\log \overline{} = \frac{1}{n} \log \Big[\log X_1 + \log X_2 + \cdots + \log X_n\Big] \quad \ldots\ldots \quad (4{\cdot}3)$$

ಅಂದರೆ ದತ್ತರಾಶಿಗಳ ಲಾಗರಿಥಂಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮವು ಆ ರಾಶಿಗಳ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮದ ಲಾಗರಿಥಂಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದು.

ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡುವಾಗಲೂ ದತ್ತರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಭಾರಗಳನ್ನಿತ್ತು ಭಾರಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. X_i ಗೆ w_i ಎಂಬ ಭಾರವನ್ನಿತ್ತರೆ ಭಾರಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮ $\overline{X}_{gw}$ ನ್ನು ಹೀಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಬಹುದು.

$$\overline{X}_{gw} = \left(X_1^{w_1} X_2^{w_2} \cdots X_1^{w_n} \right)^{1/W} \quad \ldots\ldots \quad (4{\cdot}4)$$

ಇಲ್ಲಿ $W = w_1 + w_2 + \cdots + w_n =$ ಭಾರಗಳ ಮೊತ್ತ. ಲಘುಗಣಕವನ್ನಿಳಿಸಿದರೆ,

$$\log \overline{X}_{gw} = \frac{w_1 \log X_1 + w_2 \log X_2 + \cdots\cdots + w_n \log X_n}{w_1 + w_2 + w_3 \cdots\cdots w_n}$$

ಎಂಬ ಫಲ ದೊರೆಯುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಭಾರಗಳು ಆಯಾ ರಾಶಿಯ ಮಹತ್ವಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವುವು.

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಪರಿಮಾಣದ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿದೆವು. ಈಗ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

5 ತೋರಂಕದ ಸಂಕೇತಗಳು

ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷಿಸಿ ತೋರಂಕದ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸುವಾಗ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

p – ಬೆಲೆ, ಧಾರಣೇವಾಸಿ (price)

q – ಪರಿಮಾಣ, ರಾಶಿಮಾನ (quantity)

p_0 – ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆ

q_0 – ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಪರಿಮಾಣ.

$p_0^1, p_0^2, p_0^3, \ldots;$ 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ . . . ವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆ

$q_0^1, q_0^2, q_0^3 \ldots;$ 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ . . . ವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಪರಿಮಾಣ.

$p_t^1, p_t^2, p_t^3, \ldots$; 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ . . . ವಸ್ತುವಿನ ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದ (tನೆಯ ವರ್ಷದ) ಬೆಲೆ.

$q_t^1, q_t^2, q_t^3 \ldots$; 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ . . . ವಸ್ತುವಿನ ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದ (tನೆಯ ವರ್ಷದ) ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಪರಿಮಾಣ.

$I_{o,t}$: ಆಧಾರ ವರ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತ tನೆಯ ವರ್ಷದ ತೋರಂಕ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿ ಈ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

6 ತೋರಂಕದ ಗಣನಾ ವಿಧಾನಗಳು

ತೋರಂಕವನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಲು ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

1. ಸರಾಸರಿಯ ವಿಧಾನ
2. ಸಮುಷ್ಟಿ ವಿಧಾನ ಅಥವಾ ಬೀರೀಜು ವಿಧಾನ

ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸರಕುಗಳ ಬೆಲೆಯ ಮಾರ್ಪಾಟಿನ ಬಗ್ಗೆ ತೋರಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಕಿನ ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಶೇಕಡಾವಾರು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನಾಗಿ ತಿರುಗಿಸಿಕೊಂಡು ಅಂಥ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ (ಅಥವಾ ಸಂಬಂಧಕಗಳ) ಸಾಮಾನ್ಯ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

i ಸರಕಿನ ಶೇಕಡಾ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಅಥವಾ ಸಂಬಂಧಕ $= \dfrac{p_t^i}{p_o^i} \times 100$

ಒಟ್ಟು ಇಂಥ n ಸರಕುಗಳಿದ್ದರೆ, ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತೋರಂಕ

$$I_{o,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_t^i}{p_o^i} \times 100$$

ಸಾಮಾನ್ಯ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬದಲಾವಣೆಯ ತೋರಂಕವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಇರುವ ಕುಂದು ಕೊರತೆಯನ್ನು ಹಿಂದೆಯೇ ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು ನಿವಾರಿಸಲು ಭಾರಿತ ಗಣಿತ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ವಿವಿಧ ಭಾರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ನಿಗದಿ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಭಿನ್ನಾಭಿಪ್ರಾಯವಿರುವುದು. ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಮೊಬಲಗನ್ನು ಅಂದರೆ, ಪರಿವರ್ತನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಭಾರವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಅಂದರೆ, i ಸರಕಿನ ಭಾರ $= w_i = p_o^i q_o^i$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆಗ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತೋರಂಕ ಈ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ.

$$I_{o,t} = \frac{\sum p_0 q_0 \left(\frac{p_t}{q_o}\right)}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma q_0 p_t}{\Sigma q_0 p_0} \times 100 \qquad \cdots\cdots \quad (6 \cdot 2)$$

ಇದಕ್ಕೆ ಲೆಸ್ಪೇಅರ್ ತೋರಂಕ ಸೂತ್ರವೆಂದು ಹೆಸರು (Laspayre's formula). ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಪ್ರಮಾಣ, ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಧಾರಣೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದ ಧಾರಣೆ—ಇವುಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

1966 ಮತ್ತು 1971ರಲ್ಲಿ ಅಕ್ಕಿ, ಜೋಳ, ರಾಗಿ, ಬಾಜ್ರ, ಗೋಧಿ ಇವುಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ಧಾರಣೆಗಳನ್ನು 9·6ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ವಿವಿಧ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕೋಣ.

ಕೋಷ್ಟಕ 9.6 : ಧಾನ್ಯಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ಧಾರಣೆ

ವಸ್ತು	1966 ರಲ್ಲಿ		1971 ರಲ್ಲಿ		ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕ
	ಉತ್ಪತ್ತಿ q_0 (ಕ್ವಿಂಟಾಲ್)	ಧಾರಣೆ p_0 ರೂ/ಕ್ವಿಂಟಾಲ್	ಉತ್ಪತ್ತಿ q_t (ಕ್ವಿಂಟಾಲ್)	ಧಾರಣೆ p_t ರೂ/ಕ್ವಿಂಟಾಲ್	$100 \times \frac{p_t}{p_0}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
ಅಕ್ಕಿ	454	112	583	118	105·4
ಜೋಳ	1491	76	1223	79	104·0
ರಾಗಿ	80	72	230	75	104·2
ಬಾಜ್ರ	89	60	363	69	115·0
ಗೋಧಿ	107	114	347	115	100·9

ಬೆಲೆಯ ಸಂಬಂಧಕಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮಧ್ಯಮ : (6·1)ರ ಮೇರೆಗೆ

$$I = \frac{(1{\cdot}054+1{\cdot}040+1{\cdot}042+1{\cdot}150+1{\cdot}009)}{5} \times 100$$
$$= 105{\cdot}9$$

ಲೆಸ್ಪೇಅರ್ ಸೂತ್ರದ ಮೇರೆಗೆ : (6 2)ರಂತೆ ಗಣಿಸಲು

$$\sum q_0 p_t = 53572 + 117789 + 6000 + 6141 + 12305$$
$$= 195807.$$

$$\sum q_0 p_0 = 50848 + 113316 + 5760 + 5340 + 12198$$
$$= 187462.$$

$$\therefore \quad I = \frac{195807}{187462} \times 100 = 104{\cdot}4$$

ಕೋಷ್ಟಕ 9.7ರಲ್ಲಿ ಗಣನೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 9.7 : ತೋರಂಕಗಳ ಗಣನಾಕ್ರಮ

ಧಾನ್ಯ	q_0p_0	q_0p_t	q_tp_0	q_tp	p_t/p_0
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
ಅಕ್ಕಿ	50848	53572	65296	68794	1·054
ಜೋಳ	113316	117789	92948	96617	1·040
ರಾಗಿ	5760	6000	16560	17250	1·042
ಬಾಜ್ರ	5340	6141	21780	25047	1·150
ಗೋಧಿ	12198	12305	39558	39905	1·009
ಮೊತ್ತ	187462	195807	236142	247613	5·295

7 ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮ

ಬೆಲೆಯ ಸಂಬಂಧಕಗಳ ಸಮಾನಾಂತರ ಮಧ್ಯಮಕ್ಕೆ ಬದಲು ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಆಗ ದೊರೆವ ತೋರಂಕದ ಬೆಲೆ

$$I = \left(\Pi \frac{p_t}{p_o}\right)^{1/5} \times 100 \quad .... \quad (7{\cdot}1)$$

ಇಲ್ಲಿ Π ಎಂಬುದು ಸದೃಶ ಪದಗಳ ಗುಣನಫಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಲಘು ಗಣಕ ಗಳನ್ನು ಇಳಿಸಲು,

$$\log I = \tfrac{1}{5}\Sigma(\log p - \log p_o) + 2$$
$$= 2{\cdot}02434$$
$$\therefore \quad I = 105{\cdot}8{\cdot}$$

ವಸ್ತುಗಳ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಲಕ್ಷ್ಯೈಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಂಡಲ್ಲಿ ಭಾರಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮ ವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಭಾರಗಳನ್ನು w ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ದೊರೆವ ತೋರಂಕ

$$I = \left[\Pi\left(\frac{p_t}{p_o}\right)^{w}\right]^{1/W} \times 100 \quad .... \quad (7{\cdot}2)$$

ಇಲ್ಲಿ $W = \Sigma w$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ $w = p_o q_o$ ಎಂದಿದ್ದರೆ, $\Sigma p_o q_o = W$ ಆಗುವುದು. ಲಘುಗಣಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ತೋರಂಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

$$\log I = \frac{\Sigma w(\log p_t - \log p_o)}{\Sigma w} + 2$$

ಸೂಚನೆ : ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಲು ಲಘುಗಣಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ವಿಧಾನ ಅಷ್ಟು ಸುಗಮವಾದುದಲ್ಲ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ಇದನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಬಳಸುವುದಿಲ್ಲ.

8 ಇತರ ಮಧ್ಯಮಗಳು :

ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಮ (harmonic mean)ವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ತೋರಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಆಗ,

$$I = \frac{n}{\Sigma(p_o/p_t)} \times 100 \quad .... \quad (8{\cdot}1)$$

ಎಂಬ ಸಾಮ್ಯ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. (p_o/p_t) ಎಂಬ ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳು ಎಷ್ಟು

ಇರುತ್ತವೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು n ಎಂದು ಕರೆದಿದ್ದೇವೆ. ಲೆಕ್ಕಮಾಡಲು ಅಷ್ಟು ಅನುಕೂಲವಾಗಿಲ್ಲದ ಕಾರಣ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಬಳಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳ ಭಾರಿತ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿ ತೋರಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಆಗ

$$I = \frac{\Sigma w}{\Sigma w(p_o/p_t)} \times 100 \quad .... \quad (8\cdot2)$$

ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ಭಾರಗಳನ್ನು $p_t q_t$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಈ ತೋರಂಕವು

$$I = \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_o q_t} \times 100 \quad .... \quad (8\cdot3)$$

ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಪಾಶೆ ತೋರಂಕ (Paasche's Index Number) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸಮೀಕರಣ 9·3ನ್ನು ನೋಡುವುದು. ಕೋಷ್ಟಕ 9·7 ರಿಂದ

$$\log \Sigma p_t q_t = \log 247613 = 5\cdot3938$$
$$\log \Sigma p_o q_t = \log 236142 = 5\cdot3732$$
$$\therefore \log I = 0\cdot0206 + 2 = 2\cdot0206 \qquad \therefore I = 104\cdot8$$

ಇಂತು, ಪಾಶೆ ತೋರಂಕ $= 104\cdot8$

ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಅವರೋಹಣಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅನುವಿನ್ಯಾಸಮಾಡಿ ಮಧ್ಯದ ಬೆಲೆಯನ್ನು, ಅಂದರೆ ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳ ಅರ್ಧಕವನ್ನು ತೋರಂಕವನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆಯಾದರೂ, ಇದನ್ನು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಬಳಸುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಅರ್ಧಕವು ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಗ್ಗಿ ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಲದೆ, ಎರಡು ಮೂರು ಸಂಕುಲಗಳ ಅರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಮ್ಮಿಳಿತ ಮಾಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

9 ಬೇರೀಜು ವಿಧಾನ

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬದಲು, ಬೆಲೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಹೆಚ್ಚಳದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \Sigma p_o$,

ಮತ್ತು ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅದೇ n ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಮೊತ್ತ $= \Sigma p_t$. ಇವೆರಡರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಿಂದ ತೋರಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಬಹುದು. ಆಗ ಸಿದ್ಧಿಸುವ ಸಮೀಕರಣ

$$I = \frac{\Sigma p_t}{\Sigma p_o} \times 100 \qquad \ldots\ (9.1)$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದು ಒಂದು ಬಗೆಯ ಕಚ್ಚಾ ವಿಧಾನವಾಗುವುದು, ಮತ್ತು ಆಕ್ಷೇಪಣೆಗಳಿಗೆ ಗುರಿಯಾಗುವುದು. ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಮೂಲಮಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಅನುಗುಣವಾದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಯಿಸುವುದು. ಅದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ತೋರಂಕವೂ ಬದಲಾಗುವುದು. ಇದು ಅಸಮರ್ಪಕವಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಅಕ್ಕಿಯ ಬೆಲೆ ಕೇ.ಜಿ.ಗೆ $2\frac{1}{2}$ ರೂಪಾಯಿ ಎನ್ನುವ ಬದಲು ಕ್ವಿಂಟಾಲಿಗೆ 250 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ತೋರಂಕದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಗಣನೀಯವಾದ ಮಾರ್ಪಾಟಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಧಾರಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಮೂಲಮಾನದ ಮನಸ್ವಿ ಆಯ್ಕೆಯಿಂದ ತೋರಂಕದ ಬೆಲೆ ಮಾರ್ಪಾಟಾಗುವುದು. ಇದೊಂದು ದೊಡ್ಡ ಕೊರತೆಯಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಳ್ಳಿಹಾಕತಕ್ಕದ್ದು.

ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅನುಗುಣವಾದ ವಸ್ತು ಪ್ರಮಾಣದಿಂದ ಭಾರಿತಮಾಡಿದರೆ, ಈ ಆಕ್ಷೇಪಣೆಗೆ ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ಸಮಾಧಾನ ಒದಗಿಸಿದಂತಾಗುವುದು. ಆಗ ಮನಸೋ ಇಚ್ಛೆ ಮೂಲಮಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದ್ದರಿಂದ ತೋರಂಕದ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಪರಿಣಾಮವೂ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ವಸ್ತು ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಬೆಲೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಒಟ್ಟು ವಸ್ತುವಿನ ಮೌಲ್ಯದ ಮೊಬಲಗು ದೊರೆಯುವುದು. ಈ ಮೊಬಲಗು ಅಳತೆಯ ಮಾನವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿಲ್ಲ. ಪ್ರತಿ ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆಗೂ ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮಾನವನ್ನು ಭಾರವನ್ನಾಗಿ ಆಯ್ದುಕೊಂಡರೆ ಬೇರೀಜು ಕ್ರಮದ ಮೇರೆಗೆ

$$I = \frac{\Sigma q_o p_t}{\Sigma q_o p_o} \times 100 \qquad \ldots\ (9.2)$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದು ಹಿಂದೆ (6.2)ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಸ್ಪೇಅರ್ ಸೂತ್ರವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಬೆಲೆಗಳ ಭಾರಗಳನ್ನು ಪ್ರಸಕ್ತ ವರ್ಷದ ವಸ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ತೋರಂಕವನ್ನು ನೀಡುವ ಮತ್ತೊಂದು ಸೂತ್ರ ದೊರೆಯುವುದು. ಅದು ಏನೆಂದರೆ

$$I = \frac{\Sigma q_t p_t}{\Sigma q_t p_o} \times 100 \qquad \ldots\ (9.3)$$

ಪಾಶೆ ಎಂಬಾತನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ ಈ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಪಾಶೆ ಸೂತ್ರ (Paashe's formula) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು ಹಿಂದೆಯೇ (8·3) ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಗಣನಾಕ್ರಮವನ್ನು 9 7ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಇದರ ಮೇರೆಗೆ ಪಾಶೆ ತೋರಂಕ $I = 104{\cdot}8$

ಕಾರ್ಯಾಚರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪಾಶೆ ತೋರಂಕ ಅಸಮರ್ಪಕವಾಗಿದೆಯೆನ್ನಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲದೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನೂ ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಇದು ಸರಾಗವಾಗಿ ತಿಳಿಯುವುದಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಲದೆ ವರ್ಷ ವರ್ಷಕ್ಕೂ ಈ ಭಾರಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತಿರಬೇಕಾದೀತು. ಈ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಪಾಶೆ ತೋರಂಕಕ್ಕಿಂತ ಲೆಸ್ಪೇಅರ್ ತೋರಂಕ ಹೆಚ್ಚು ಚಾಲ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

10 ತೋರಂಕಗಳ ಪರೀಕ್ಷಣಗಳು (Tests of Index Numbers)

ಯಾವುದೇ ತೋರಂಕವು ಬೆಲೆಗಳ ಮಟ್ಟದ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಅಳತೆಯೇ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಕೆಲವು ಪರೀಕ್ಷಣಗಳು ಇರುವುವು. ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ:

1 ವ್ಯಾಪ್ಯಸಮತೆ ಪರೀಕ್ಷಣ (Commensurability test) : ಇದರ ಮೇರೆಗೆ ವಸ್ತುವಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಮೂಲಮಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ತೋರಂಕದ ಬೆಲೆ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದದಿರಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಧಾನ್ಯದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೆ. ಜಿ. ಯಲ್ಲಿ ಅಳೆದರೂ ಕ್ವಿಂಟಾಲ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಅಳೆದರೂ ತೋರಂಕದ ಬೆಲೆ ಮಾರ್ಪಾಟಾಗ ಕೂಡದು.

2 ಖಚಿತತೆ ಪರೀಕ್ಷಣ (Determinateness Test) : ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವಸ್ತು ಅಥವಾ ಸರಕಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ ತೋರಂಕವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗದೆ ಅನಂತವಾಗದೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಖಚಿತವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಬೇಕು.

3 ಅನುಪಾತ ಗುಣ ಪರೀಕ್ಷಣ (Proportionality Test): ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆಗಳು ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆಗಳ ಸಮಾನಾನುಪಾತಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ತೋರಂಕವು 100ರ ಅದೇ ಅನುಪಾತಿಯಾಗಿರಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎಲ್ಲ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಯೂ ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆಯ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಯಿತೆಂದರೆ ತೋರಂಕದ ಬೆಲೆ 200 ಆಗಬೇಕು.

4 ತಾದಾತ್ಮ್ಯ ಪರೀಕ್ಷಣ (Indentity test) : ತೋರಂಕದ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದ ಬದಲು ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಗಣನೆ ಮಾಡಿದರೆ ಬರಾಬರಿ 100 ಬರಬೇಕು.

ಈ ನಾಲ್ಕು ಪರೀಕ್ಷಣಗಳೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯವಹಾರದ ಪರೀಕ್ಷಣಗಳು ; ಇವುಗಳಿಗೆ ವಿಶೇಷ ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಜ್ಞಾನ ಬೇಕಿಲ್ಲ. ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳ ಭಾರಿತ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮವು (ವಸ್ತುವಿನ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಭಾರಗಳನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ) ಮೊದಲನೇ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

5 ಕಾಲ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಪರೀಕ್ಷಣ (Time reversal test): ತೋರಂಕದ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದರೆ ಲಭಿಸುವ ಫಲಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವ್ಯಸ್ತರಾಶಿಗಳಾಗಿರಬೇಕು. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ

$$I_{o,t} \times I_{t,o} = 100^2 \quad \text{....} \quad (10{\cdot}1)$$

ಬೆಲೆಗಳ ಸಂಬಂಧಕಗಳ ಅಭಾರಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮ ಈ ಪರೀಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ; ಉಳಿದವು ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ಕಾಲಹಿಮ್ಮುಖ ಪರೀಕ್ಷಣ ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

11 ಫಿಷರನ ಆದರ್ಶ ತೋರಂಕ:

ಇರ್ವಿಂಗ್ ಫಿಷರ್ (Irving Fisher) ಎಂಬಾತನು ತೋರಂಕಗಳ ರಚನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ವಿಸ್ತಾರವಾದ ಮತ್ತು ಸುವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾದ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಪರೀಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಹಲವಾರು ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿರುವನು. ಅವನು ಅಡ್ಡ ಬೆರಕೆಯ (crossing) ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಿದ್ದಾನೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೆ "ಆದರ್ಶ ತೋರಂಕ" (ideal index) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳ ($p_t q_t$) ಭಾರಿತವಾದ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಮಕ್ಕೂ, ($p_o q_o$) ಭಾರಿತವಾದ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮಕ್ಕೂ ಗುಣೋತ್ತರ ಅಡ್ಡ ಬೆರಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿಸಿ ಈ ಆದರ್ಶ ತೋರಂಕವನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾನೆ. ಅಂದರೆ,

ಭಾರಿತ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಮ $= \dfrac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_o q_t}$

ಭಾರಿತ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮ $= \dfrac{\Sigma p_t q_o}{\Sigma p_o q_o}$

ಇವೆರಡರ ಗುಣೋತ್ತರ ಅಡ್ಡ ಬೆರಕೆ =

$$\sqrt{\left(\frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_t q_o}{\Sigma p_o q_t}\right)} \quad \text{....} \quad (11{\cdot}1)$$

ಆದುದರಿಂದ,

$$\text{ಆದರ್ಶ } I = 100 \times \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_t q_o}{\Sigma p_o q_t}\right)}$$

ಈ ತೋರಂಕವು ಕಾಲಹಿಮ್ಮುಖ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಈ ಸೂತ್ರದ ಅರ್ಥ ನಿರೂಪಣೆ ಮಾಡುವುದು ಕಷ್ಟವಾಗುವುದು.

12 ಮಾರ್ಷಲ್-ಎಜ್ವರ್ಥ್ ಸೂತ್ರ

ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಅಡ್ಡಬೆರಕೆ ಮಾಡಿದ ಹಲವಾರು ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಇರ್ವಿಂಗ್ ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ತೋರಂಕವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಬೇರೀಜು ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಭಾರಿತ ಸಮಾಂತರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ತೋರಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದನ್ನು 9.2ನೇ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆಧಾರ ವರ್ಷದ q_o ವಸ್ತು ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಭಾರವನ್ನಾಗಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಬದಲು q_o ಮತ್ತು q_t ಗಳ ಸಮಾಂತರ ಅಡ್ಡ ಬೆರಕೆಯನ್ನು ಭಾರವನ್ನಾಗಿ ಬಳಸಿದರೆ

$$I = \frac{\Sigma(q_o + q_t)p_t}{\Sigma(q_o + q_t)p_o} \times 100 \quad \dots \quad (12{\cdot}1)$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರ ದೊರೆಯುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಮಾರ್ಷಲ್-ಎಜ್ವರ್ಥ್ (Marshall-Edgeworth) ಸೂತ್ರವೆಂದು ಹೆಸರು.

ಕಾಲ ಹಿಮ್ಮುಖ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ಈ ತೋರಂಕ ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವುದು ಫಿಷರನ ಆದರ್ಶ ತೋರಂಕದಷ್ಟು ಕಷ್ಟವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

13 ಇತರ ಪರೀಕ್ಷಣಗಳು

6 **ಕಾರಕ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಪರೀಕ್ಷಣ :** ತೋರಂಕಗಳ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ p, q ಎಂಬ ಎರಡು ಕಾರಕಗಳು ಸೇರಿವೆ. ಇವೆರಡನ್ನೂ ಪರಸ್ಪರ ಪರಿವರ್ತನೆ ಮಾಡಿದರೆ ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಅದೇ ತೋರಂಕ ಲಭಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದು ಮತ್ತೊಂದು ಪರೀಕ್ಷಣ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಕ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಪರೀಕ್ಷಣ (factor reversal test) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಫಿಷರನ ಆದರ್ಶ ತೋರಂಕ ಒಂದೇ ಈ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ನೆರವೇರಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತಾವ ತೋರಂಕವೂ ಈ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

7 **ವರ್ತುಲ ಪರೀಕ್ಷಣ :** $I_{o,k}$ ಮತ್ತು $I_{o,t}$, ಎಂಬುವು ಒಂದೇ ಆಧಾರ ವರ್ಷವನ್ನು ಕುರಿತು k ಮತ್ತು t ನೆಯ ವರ್ಷಗಳ ತೋರಂಕಗಳಾದರೆ ಮತ್ತು

kನೆಯ ವರ್ಷವನ್ನು ಆಧಾರ ವರ್ಷವನ್ನಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ tನೆಯ ವರ್ಷದ ತೋರಂಕ $I_{k,t}$ ಇದ್ದರೆ,

$$I_{o,k} \times I_{k,t} = I_{o,t} \times 100 \quad .... \quad (13{\cdot}1)$$

ಇರಬೇಕು. ಇದರಲ್ಲಿ $t = 0$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$I_{o,k} \times I_{k,o} = I_{o,o} \times 100 = 100^2 \quad .... \quad (13{\cdot}2)$$

ಇದು (10·1)ನೇ ಸಮೀಕರಣವೇ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ವರ್ತುಲ ಪರೀಕ್ಷಣವು ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ ಕಾಲಪ್ರತಿಲೋಮ ಪರೀಕ್ಷಣದ ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಿಸಿದ ರೂಪವಾಗುವುದು. ಆದ ಕಾರಣ, ಕಾಲಪ್ರತಿಲೋಮ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸದಿರುವ ಯಾವ ಸೂತ್ರವೂ ವರ್ತುಲ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸಲಾರದು. ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮ, ಭಾರಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮ, ಫಿಶರನ ಆದರ್ಶ ತೋರಂಕ, ಮಾರ್ಷಲ್–ಎಜ್ವರ್ಥ್ ತೋರಂಕ—ಇವು ನಾಲ್ಕು ಮಾತ್ರ ಕಾಲ ಪ್ರತಿ ಲೋಮ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ನಾಲ್ಕರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮಗಳು ಮಾತ್ರ ವರ್ತುಲ ಪರೀಕ್ಷಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ; ಉಳಿದೆರಡೂ ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮತ್ತು ಭಾರಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮಗಳು ಎಲ್ಲಾ ಪರೀಕ್ಷಣಗಳನ್ನೂ ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಶ್ರಮವಾದಾಗ್ಯೂ, ಭಾರಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ತೋರಂಕವನ್ನಾಗಿ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸೂಕ್ತವೆಂದು ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಲ್ಲಿ ಕೊಡಕುಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ 8 ಪಾಲು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ, ಮತ್ತೊಂದರ ಬೆಲೆ $\frac{1}{8}$ ಪಾಲಿಗೆ ಇಳಿದರೆ, ಗುಣೋತ್ತರ ತೋರಂಕವು 100 ಆಗುವುದು. ಆದರೆ ಇದು ಮಿಥ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದಲ್ಲದೆ, ಅಪಾರ್ಥಕ್ಕೆ ಎಡೆಯಾಗುವುದು. ಸೂಕ್ತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಭಾರಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಈ ಕೊರತೆಗಳನ್ನು ನಿವಾರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಲೆಸ್ಪೇಅರ್ ಸೂತ್ರದಿಂದ ದೊರೆಯುವ ತೋರಂಕ ಮೇಲ್ಮುಖ ಅಭಿನತಿಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇದರಂತೆಯೇ ಪಾಶೆ ತೋರಂಕವು ಕೆಳಮುಖ ಅಭಿನತಿಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮಕ್ಕೆ ಯಾವ ವಿಧದ ಅಭಿನತಿಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ, ಆದಕಾರಣ ಅದನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಒಳ್ಳೆಯದು. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ವಿಶ್ವಸ್ತತೆ, ಉತ್ಕೃಷ್ಟತೆ ಮತ್ತು ಸಂದರ್ಭಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಮಣಿವ ಸ್ವಭಾವ ಮುಂತಾದ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ಭಾರಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮವೇ ಉತ್ತಮ ತೋರಂಕವಾಗುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

14 ಭಾರಗಳ ಆಯ್ಕೆ

ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಲ್ಲಿ ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದನ್ನು ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ. ವಿವಿಧ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ವಿವಿಧ ಭಾರಗಳನ್ನು ಪ್ರಯುಕ್ತಿಸುವುದನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮತ್ತು ಅನುಭೋಗದ ಸರಕುಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಭಾರಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಭಾರಗಳು ಆಯಾ ಸರಕುಗಳ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಗಳಾಗಿರಬೇಕು. ಹಾಗೂ ತೋರಂಕದಿಂದ ಯಾವುದನ್ನು ಅಳೆಯಬೇಕೆಂದಿದ್ದೇವೋ ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿಯೂ ಸಹ ಭಾರಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಠೋಕು ಅಥವಾ ಸಗಟು ಬೆಲೆಯ ತೋರಂಕಕ್ಕೆ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಭಾರಗಳು ಬೇಕಾಗುವುವು ; ಕೊಳ್ಳುವವರ ಅಂದರೆ ಬಳಕೆದಾರರ ಬೆಲೆಯ ತೋರಂಕಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯ ಭಾರಗಳು ಬೇಕಾಗುವುವು.

ಭಾರಗಳನ್ನು ಬಳಸುವಲ್ಲಿ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಏಳುತ್ತದೆ. ಉತ್ಪತ್ತಿ ರಾಶಿಯನ್ನು ಭಾರವನ್ನಾಗಿ ಬಳಸಬೇಕೆ ಅಥವಾ ಸರಕಿನ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಭಾರವನ್ನಾಗಿ ಬಳಸಬೇಕೆ ? ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ನೇರವಾದ ಉತ್ತರ ಯಾವುದೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಯಾಗಿ ಅವುಗಳ ಭಾರಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಎಂದಿಷ್ಟು ಹೇಳಬಲ್ಲೆವು. ಅಲ್ಲದೆ, ಹೀಗೆ ಅನುಪಾತಿಯಾಗಿರುವಂತೆ ಯಾವ ಭಾರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೂ ಫಲಿತಾಂಶ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದೇಯಾಗಿರುವುದು. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ನಿಯಮಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಮೆ ಬಳಸಲಾಗುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಲ್ಲಿರತಕ್ಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು ನಗಣ್ಯವಾದುದೆಂಬುದಾಗಿ ಅನುಭವದಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ.

15 ಇಮ್ಮಡಿ ಭಾರಕರಣ (Double weighting)

ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಧಾರಣೆಯ ಮಟ್ಟವು ಸಮಾನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಬೇರೆಬೇರೆ ಜಾತಿ ಅಥವಾ ವರ್ಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವರ್ಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು :

(i) **ಕಚ್ಚಾ ವಸ್ತುಗಳು :** ಈ ವರ್ಗದ ವಸ್ತುಗಳ ಧಾರಣೆಯಲ್ಲಿ ಅಧಿಕ ಚಂಚಲತೆ ಕಂಡು ಬರುವುದು.

(ii) **ಕಾರ್ಖಾನೆಗಳಲ್ಲಿ ತಯಾರಾದ ವಸ್ತುಗಳು :** ಈ ವರ್ಗದ ವಸ್ತುಗಳ ಧಾರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅಷ್ಟು ಬದಲಾವಣೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(iii) **ಕಾರ್ಮಿಕರ ಕೂಲಿ :** ಈ ವರ್ಗದ ಧಾರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಏರುಪೇರುಗಳಿರುತ್ತವೆ.

(iv) ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ, ಜೀವವಿಮೆಯ ಕಂತು (ಪ್ರೀಮಿಯಂ) ಮುಂತಾದ ಒಪ್ಪಂದದ ಬಾಬುಗಳು : ಈ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಹೀಗೆ ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗಕ್ಕೂ ಅದರ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಭಾರಗಳನ್ನು ನಿಗದಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಹೆಚ್ಚು ಮುಖ್ಯವಾದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ಭಾರವನ್ನು ಹಚ್ಚಬೇಕು. ಇದಾದ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದಲ್ಲೂ ಸೇರ್ಪಡೆಯಾದ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಭಾರಗಳನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಇಮ್ಮಡಿ ಭಾರಕರಣ (double weighting) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಧಾರಣೆವಾಸಿಯ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವಾಗ ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಪ್ರಧಾನವಾದ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ನಿಖರವಾದ ಭಾರಗಳನ್ನು ನೀಡಿ, ಅಪ್ರಧಾನವಾದ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಬಟುವಾದ ಭಾರಗಳನ್ನಿತ್ತರೆ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರೆಯುವುದೆಂದು ಅನುಭವದಿಂದ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಅನೇಕ ವರ್ಷಗಳವರೆಗೆ ಒಂದೇ ಭಾರಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿ ತಿಳಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದೆ ಹೋಗಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ವಸ್ತುಗಳ ಮತ್ತು ವರ್ಗಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಪಾಟುಗಳು ಆಗುತ್ತಿರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಭಾರಗಳನ್ನು ಕಾಲಕಾಲಕ್ಕೆ, ಎಂದರೆ, ಹತ್ತು ವರ್ಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ, ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತಿರಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ, ಎರಡನೇ ದಶಕದ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಮೊದಲನೇ ದಶಕದ ತೋರಂಕಗಳ ಸರಿಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ತರಲು ಒಂದು ಸಂಸ್ಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು. ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಕ್ರಮದಂತೆ ಭಾರಗಳನ್ನು ನೀಡಿ I_1 ತೋರಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬೇಕು. ಹಾಗೂ, ಹೊಸ ಕ್ರಮದಂತೆ ಭಾರಗಳನ್ನು ನೀಡಿ I_2 ತೋರಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಬೇಕು. ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಹೊಸ ಕ್ರಮದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು I_1/I_2 ಎಂಬ ಗುಣಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಸಂಸ್ಕಾರ ಮಾಡಬೇಕು. ಆಗ ಎಲ್ಲ ವರ್ಷಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ಅಳತೆಗೋಲನ್ನು ಬಳಸಿದಂತಾಗುವುದು.

16 ವಸ್ತುಗಳ ಆಯ್ಕೆ

ವಸ್ತುಗಳ ಆಯ್ಕೆಯ ವಿಷಯವನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ತೋರಂಕದ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ವಸ್ತುಗಳ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು. ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಉದ್ದೇಶಗಳು ನಾನಾ ಬಗೆಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ದವಸ ಧಾನ್ಯಗಳ ಧಾರಣೆವಾಸಿಯನ್ನು ಕುರಿತ ತೋರಂಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ನಮ್ಮ ಸೀಮೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ

ಬೆಳೆಯುವ ಧಾನ್ಯಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಹಾಗಲ್ಲದೆ ಠೋಕು ವ್ಯಾಪಾರದ ಬೆಲೆಗಳ ತೂನೆದಾಟವನ್ನು ಅಳೆಯುವ ತೋರಂಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದಾದರೆ ಬೇರೆ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವುದು. ಜೀವನ ವೆಚ್ಚದ ಮಟ್ಟದ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಅಳೆಯಲು ತೋರಂಕ ಬೇಕಾದಾಗ ಒಂದು ಸಾಧಾರಣ ಸಂಸಾರಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಹೀಗೆ ತೋರಂಕದ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ವಸ್ತುಗಳ ಆಯ್ಕೆಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳಾಗತಕ್ಕದ್ದು.

ಯಾವುದೇ ವಸ್ತು ಸಮೂಹವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಅದಕ್ಕೆ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದ ನಾಲ್ಕು ಗುಣಗಳಿರಬೇಕು.

(a) ಪರ್ಯಾಪ್ತತೆ (adequacy)
(b) ಪ್ರತೀಕತೆ (representativeness)
(c) ತುಲನೀಯತೆ (comparability)
(d) ನಿಖರತೆ (accuracy).

ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ತೋರಂಕದ ಉದ್ದೇಶ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಇವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿದ ಮೇಲೂ ನಾವು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವ ವಸ್ತುಗಳು ಅಸಂಖ್ಯಾತವಾಗಿರುವುವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಇಡೀ ಕರ್ನಾಟಕಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಠೋಕು ಬೆಲೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ತೋರಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕೆನ್ನಿ. ಎಲ್ಲ ಸರಕುಗಳ ಠೋಕು ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಸಂಗ್ರಹಿಸಬೇಕಾದೀತು. ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಕೆಲಸ. ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅನೇಕ ಎಡರು ತೊಡರುಗಳಿವೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ಈ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನೇ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದೀತು. ಹೀಗೆ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುವ ವಸ್ತುಗಳ ಸಮೂಹಕ್ಕೆ 'ಪ್ರತಿಚಯ' ಅಥವಾ 'ಪ್ರತಿದರ್ಶ' (sample) ಎಂದು ಹೆಸರು. ವಿಶ್ವಸ್ತವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಈ ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಸಾಕಷ್ಟು ವಸ್ತುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು. ಈ ಗುಣವನ್ನೇ ಪರ್ಯಾಪ್ತತೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎಷ್ಟು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿದರ್ಶಕದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬೇಕೆಂಬುದು ಸಂದರ್ಭಕ್ಕನುಸಾರ ಬದಲಾಗುತ್ತೆ. ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಲದೆ ಕೇವಲ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುವುದರಿಂದ ಲಾಭವೇನೂ ಆಗಲಾರದು. ನಮ್ಮ ಉದ್ದೇಶ ಪೂರ್ತಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ವಸ್ತುಗಳ ಸೂಕ್ತ ಆಯ್ಕೆ ಮುಖ್ಯವಾದುದು. ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ವರ್ಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗದಿಂದಲೂ ಆ ವರ್ಗವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸಮುಚಿತವಾಗಿ ಕೆಲವೇ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡರೂ ಸಾಕಾಗಬಹುದು. ಇಂಥ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಅನುಭವವೂ ವಿವೇಚನಾಶಕ್ತಿಯೂ ಅಗತ್ಯ.

ನಾವು ಆರಿಸಿಕೊಂಡ ವಸ್ತುಗಳ ಗುಣಮಟ್ಟವು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗದಂತಿರಬೇಕು,

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಆಧಾರ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ನೆಲ್ಲೂರು ಅಕ್ಕಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ರೇಷನ್ ಡಿಪೋಗಳ ಮೂಲಕ ಹಂಚಲಾಗುವ ಬ್ರೆಜಿಲ್ ಅಕ್ಕಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, ನಮಗೆ ದೊರಯುವ ಫಲಿತಾಂಶ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗೂ, ನಾವು ಆಯ್ದುಕೊಂಡಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಧಾರಣೆಯನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ನಿಖರವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬೇಕು. ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಹಚ್ಚಿಸುವಂಥ ಭಾರಗಳು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕು, ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿರ ಬೇಕೆಂಬ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿ ಧಾರಣೆ ತಿಳಿಯಲಾಗದ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಾರದು. ಒಂದು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿಧಾಯಕ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು, ವಸ್ತುಗಳ ಗುಣಮಟ್ಟವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟ ನಿರೂಪಣೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳ ಬೇಕು. ಹಾಗೂ ಧಾರಣೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸೋಕು ಧಾರಣೆಯೇ, ಸುಗ್ಗಿಯ ಬೆಲೆಯೇ, ಪೇಟೆ ಧಾರಣೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಗದಿ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಾಲಕಾಲಕ್ಕೆ ಖಚಿತವಾಗಿ ತಪಾಸಣೆ ಮಾಡಿ ವರದಿ ಮಾಡುವ ಒಂದು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೂ ಬೇಕಾಗುವುದು.

17 ಜೀವನ ವೆಚ್ಚದ ತೋರಂಕ

ಜೀವನ ನಿರ್ವಾಹಕ್ಕೆ ದಿನಂಪ್ರತಿ ಬೇಕಾಗುವ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆ ಏರುತ್ತಿರುವ ಕಾಲ ದಲ್ಲಿ ಸರಕಾರಿ ನೌಕರರು ಮತ್ತು ಇತರ ಸಂಬಳಗಾರರು ಹೆಚ್ಚು ತುಟ್ಟಿಭತ್ಯವನ್ನು ಬೇಡು ವುದು ಸಹಜವೇ. ಅವರಿಗೆ ತುಟ್ಟಿಭತ್ಯ ಎಷ್ಟು ಕೊಡಬೇಕು ಎನ್ನುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯೂ ಏಳುತ್ತದೆ, ಸಾಮಾನುಗಳ ಧಾರಣೆ ವಾಸಿಗಳು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಏರಿವೆ ಎಂಬು ದನ್ನು ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿ, ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ತುಟ್ಟಿಭತ್ಯವನ್ನು ಏರಿಸುವುದು ನ್ಯಾಯ ವಾಗಿ ತೋರುತ್ತದೆ. ಒಬ್ಬ ನೌಕರನ ಅಥವಾ ಸರಕಾರಿ ಉದ್ಯೋಗಸ್ಥನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜೀವನಕ್ಕೆ ಬಳಸಲಾಗುವ ವಸ್ತುಗಳು ಯಾವುವು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪರಿಮಾಣ ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಈ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಾಗುವ ಮಾರ್ಪಾಟನ್ನು ಅರಿತು ಜೀವನ ವೆಚ್ಚದ ಮಟ್ಟವನ್ನು ತೋರಿಸುವ ತೋರಂಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಇಂಥ ತೋರಂಕಕ್ಕೆ ಜೀವನ ವೆಚ್ಚದ ತೋರಂಕ (cost of living index) ಅಥವಾ ಬಳಕೆ ದಾರರ ಬೆಲೆಯ ತೋರಂಕ (consumer's price index) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇಂಥ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ನಾಲ್ಕು ಹಂತಗಳಿವೆ ಎನ್ನಬಹುದು.

1 ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿ ಅಥವಾ ದರ್ಜೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕುಟುಂಬದವರು ಜೀವನ ನಿರ್ವಾ ಹಕ್ಕೆ ಬಳಸುವ ವಸ್ತುಗಳು ಯಾವುವು ಮತ್ತು ಆ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಯಾವ ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವರು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಬೇರೆ ಬೇರೆ [illegible] ಕುಟುಂಬಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನುಗಳು ಬೇಕಾಗುವುವು.

ಗಿರಣಿ ಕೂಲಿಗಾರರ ಕುಟುಂಬದವರ ವೆಚ್ಚಪಟ್ಟಿ (family budget) ಒಂದು ರೀತಿ ಇದ್ದರೆ ಸರಕಾರಿ ಕಚೇರಿಗಳಲ್ಲಿ ಗುಮಾಸ್ತರ ವೆಚ್ಚದ ಅಂದಾಜು ಪಟ್ಟಿ ಬೇರೆ ರೀತಿ ಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕಾಲೇಜು ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಸಂಸಾರದ ವೆಚ್ಚ ಮಗದೊಂದು ರೀತಿ ಇರು ವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಯಾವ ವರ್ಗ ಅಥವಾ ಅಂತಸ್ತಿನವರ ಮನೆ ಖರ್ಚನ್ನು ಕುರಿತ ತೋರಂಕ ಬೇಕಾಗುವುದೋ ಆ ವರ್ಗದವರಿಂದಲೇ ಅವರು ತಮ್ಮ ಸಂಸಾರಕ್ಕೆ ಏನೇನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಖರ್ಚು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ತಪಾಸಣೆ ಅಥವಾ ಸರ್ವೇಕ್ಷಣೆ (survey) ನಡೆಸಿ ಈ ಮಾಹಿತಿ ಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸಬೇಕು ಇದಕ್ಕೆ ಕುಟುಂಬ ವೆಚ್ಚದ ಅಂದಾಜು ಪಟ್ಟಿಯ ತಪಾಸಣೆ (family budget enquiry) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದರ ಮೂಲಕ ಶೇಖರಿಸಿದ ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಯಾವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಈ ದರ್ಜೆಯ ಕುಟುಂಬ ಗಳು ಬಳಸುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಗೊತ್ತುಪಡಿಸ ಬಹುದು. ಇದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಆಯಾ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಭಾರಗಳನ್ನು ನೀಡಿ ತೋರಂಕ ವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗುವುದು.

2 ಸೂಕ್ತವಾದ ಒಂದು ವರ್ಷವನ್ನು ಆಧಾರ ವರ್ಷವನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳ ಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಬಹಳ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದ ಮಾಡಬೇಕು. ಹೆಚ್ಚು ಬೆಲೆಯ ಏರಿಳಿತಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗದೆ ಬೆಲೆಗಳು ಸ್ಥಿಮಿತವಾಗಿರುವಂಥ ವರ್ಷವನ್ನು ಆಧಾರ ವರ್ಷವನ್ನಾಗಿ ಆಯ್ದು ಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ನಮ್ಮ ತೋರಂಕ ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

3 ಕುಟುಂಬ ಖರ್ಚಿನ ಅಂದಾಜು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿದ ವಸ್ತುಗಳ ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಆದರ ಮೇರೆಗೆ ಆಗುವ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು. ಈ ಮೊಬಲಗನ್ನು 100 ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದ ಖರ್ಚನ್ನು ಶೇಕಡಾ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು.

4 ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಆಯಾ ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು, ವಿಚಾರಿಸಿ ತಿಳಿದು ಕೊಂಡು, ಅದರ ಮೇರೆಗೆ, ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಅಥವಾ ಆ ವಸ್ತು ಸಮೂಹದ ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕ ವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಬೇಕು. ಅಂದರೆ p_1/p_0 ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ದತ್ತವಾದ ಭಾರ ಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ಈ ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳ ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಅದು ಅಭೀಪ್ಸ ತೋರಂಕವಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ

$$I = \frac{\Sigma w(p_1/p_0)}{\Sigma w} \times 100 \qquad \text{....} \quad (15{\cdot}1)$$

ಎಂಬ ಸಾಮ್ಯದಿಂದ I ನ್ನು ನಿಗದಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಟ್ಟು 100

ಆಗುವಂತೆ ಭಾರಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. ಆಗ $I = \sum w(p_i/p_o)$ ಆಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಭಾರಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳ ತನಕ ಬಳಸಬಹುದು. ಜನರ ಅಭ್ಯಾಸ, ಪರಿಸರ, ಭಾವನೆ ಮತ್ತು ಸಾಮೂಹಿಕ ಬದಲಾವಣೆಗಳ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಅನುಭೋಗದ ವೆಚ್ಚ ನಮೂನೆ ಮಾರ್ಪಾಟಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಸಮಸಮವಾಗಿ ಈ ಭಾರಗಳೂ ಮಾರ್ಪಾಟಾಗುತ್ತವೆ. ಅದರಿಂದ 10 ಅಥವಾ 12 ವರ್ಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ, ಹೊಸ ತಪಾಸಣೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ ಈ ಭಾರಗಳನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಬೇಕು.

16 ಜೀವನ ವೆಚ್ಚದ ಸೂಚ್ಯಂಕ

ಕೆಲವೆಡೆಯಲ್ಲಿ ಗಿರಣಿ ಕೆಲಸಗಾರರ ಜೀವನ ವೆಚ್ಚದ ಬಗ್ಗೆ ನಡೆಸಿದ ತಪಾಸಣೆಯ ಮೇರೆಗೆ ಕೆಳಕಾಣಿಸಿದಂತೆ ಭಾರಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ(ನೋಡಿ ಕೋಷ್ಟಕ 9.8) ಆಧಾರ ವರ್ಷದಲ್ಲಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿವರಗಳಿಂದ ಜೀವನ ವೆಚ್ಚದ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು.

ಕೋಷ್ಟಕ 9.8 : ಜೀವನ ವೆಚ್ಚದ ಸೂಚ್ಯಂಕ – ಗಣನಾ ಕ್ರಮ

ವಸ್ತುಗಳು	ಭಾರಗಳು	p_o: ಆಧಾರ ವರ್ಷದ ದರ ರೂ.	p_i: ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷದ ದರ ರೂ.	$\left(\frac{p_i}{p_o}\right)$	$w\left(\frac{p}{p_o}\right)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
ಆಹಾರವಸ್ತುಗಳು	48	56	98	1·75	84·00
ಇಂಧನ, ದೀಪ	8	8	18	2·25	18·00
ಅರಿವೆ, ವಸನ	12	15	24	1·60	19·20
ಪ್ರಸಾಧನ	6	10	28	2·80	16·80
ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ	14	20	36	1·80	25·20
ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸ	3	12	30	2·50	7·50
ಇತರ	9	6	18	3·00	27·00
ಮೊತ್ತ	100				188·40

ಗಣನಾಕ್ರಮವು ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದಲೇ ಸ್ಪಷ್ಟಗಾಗುವುದು.

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸೂಚ್ಯಂಕ = 188·4

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1 ಅಕ್ಕಿ ಮತ್ತು ರಾಗಿಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. 1970ನೇ ಇಸ್ವಿಯನ್ನು ಆಧಾರ ವರ್ಷವನ್ನಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಈ ಧಾನ್ಯಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿರಿ.

ವರ್ಷ	ಅಕ್ಕಿಯ ದರ ಕ್ವಿಂಟಾಲಿಗೆ ರೂ.	ರಾಗಿಯ ದರ ಕ್ವಿಂಟಾಲಿಗೆ ರೂ.
1970	80	64
1971	96	71
1972	124	82
1973	176	98

2 ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ 1965-66, 1969-70, 1970-71 ಈ ಇಸ್ವಿಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾದ ಧಾನ್ಯಗಳ, ಬೇಳೆಗಳ ಮತ್ತು ಎಣ್ಣೆ ಬೀಜಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು (ಲಕ್ಷ ಟನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. 1965-66ನೇ ವರ್ಷವನ್ನು ಆಧಾರ ವರ್ಷವನ್ನಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಉಳಿದ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಭಾರಿತ ತೋರಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಭಾರಗಳನ್ನು 2ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಬೆಳೆ	ಭಾರ	1965-66	1969-70	1970-71
ಧಾನ್ಯಗಳು	76	31·9	52·9	55·6
ಬೇಳೆಗಳು	8	3·5	4·4	4·0
ಎಣ್ಣೆ ಬೀಜಗಳು	16	4·8	5·9	7·0

3 ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲೆಸ್ಪೆಯರ್ ಅಥವಾ ಪಾಶೆಯ ತೋರಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಸ್ತು	ಮೂಲ ವರ್ಷ		ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷ	
	ದರ	ಪರಿಮಾಣ	ದರ	ಪರಿಮಾಣ
A	6	50	10	60
B	2	100	4	75
C	4	60	6	50
D	10	30	12	40
E	8	40	12	30

4 ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಂದ ಲೆಸ್ಪೆಯರ್, ಪಾಶೆ, ಫಿಶರನ ಆದರ್ಶ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಶಲ್-ಎಜ್ವರ್ಥ್—ಈ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿರಿ.

ವಸ್ತು	ಆಧಾರ ವರ್ಷ		ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷ	
	ದರ	ಪರಿಮಾಣ	ದರ	ಪರಿಮಾಣ
1	6	50	10	56
2	2	100	2	120
3	4	60	6	60
4	10	30	12	24
5	8	40	12	26

5 ಆಹಾರ ಪದಾರ್ಥಗಳ ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಭಾರಗಳನ್ನೂ ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ತೋರಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಸ್ತು	ಬೆಲೆ ಸಂಬಂಧಕ	ಭಾರ
ಅಕ್ಕಿ	290	69
ಬೇಳೆ	421	4
ಬೆಲ್ಲ	400	2
ಎಣ್ಣೆ	553	11
ಇತರ	417	14

6 ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ವಸ್ತು ಸಮೂಹಗಳ ಜೀವನ ವೆಚ್ಚದ ತೋರಂಕವನ್ನು ಮತ್ತು ಭಾರಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದರ ಭಾರಿತ ತೋರಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಸ್ತು ಸಮೂಹ	ಸಮೂಹ ತೋರಂಕ	ಸಮೂಹ ಭಾರ
ಆಹಾರ	412	60
ಅರಿವೆ	545	5
ಇಂಧನ, ದೀಪ	388	7
ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ	117	10
ಇತರ	284	18

(ಪಿ. ಯು. ಸಿ. ಬೋರ್ಡ್)

7 ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಜೀವನವೆಚ್ಚದ ತೋರಂಕವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೂಹ	ಭಾರ	ಸಮೂಹ ತೋ. ೦ಕ
ಆಹಾರ	53·5	336 6
ಇಂಧನ, ದೀಪ	7·0	251·5
ಬಟ್ಟೆ	13 8	260·4
ಮನೆ ಬಾಡಿಗೆ	6·4	100 0
ಇತರ	19·3	297·4

ಅಧ್ಯಾಯ 10

ಕಾಲಸರಣಿ (Time Series)

1 ಪೀಠಿಕೆ

ಆಧುನಿಕ ಯುಗದಲ್ಲಿ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯಗಳ ಆರ್ಥಿಕ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಮತ್ತು ಪುರೋಭಿವೃದ್ಧಿಗೆ ಪಂಚವಾರ್ಷಿಕ ಮುಂತಾದ ಯೋಜನೆಗಳು ಆಧಾರಭೂತವಾಗಿರುವು ದೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಖಾಸಗೀ ಉದ್ದಿಮೆಗಳಲ್ಲೂ ವಾಣಿಜ್ಯ ಸಂಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲೂ ಸಹ ಉತ್ಪತ್ತಿ, ಮಾರಾಟ, ಬಂಡವಾಳ ರೂಢಿಸುವಿಕೆ, ಧಾರಣೆಯ ನಿರ್ಧಾರ ಮುಂತಾದ ವಹಿವಾಟುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಉಪಯುಕ್ತ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ವಭಾವಿಯಾಗಿ ಗೊತ್ತುಪಡಿಸುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಭವಿಷ್ಯದ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳನ್ನೂ ಮುಂಚಿತ ವಾಗಿ ಊಹೆಮಾಡಿ ಅಥವಾ ಅಂದಾಜುಮಾಡಿ ಅವಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಕೈಗೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ ಹಿಂದಿನ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳನ್ನೂ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಮುನ್–ಅಂದಾಜು (forecast) ಅಥವಾ ಭವಿಷ್ಯದ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣೆ (projection) ಮಾಡ ಬೇಕಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ರಾಜ್ಯದ ಈಗಿನ ಜನಸಂಖ್ಯೆ, ಜನನ ದರ, ಸಾವಿನ ದರ, ವಲಸೆಯ ಪ್ರಮಾಣ, ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ತಿಳಿದು ಅವುಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಮುಂದಿನ 20 ಅಥವಾ 25 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಜನವೃದ್ಧಿ ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಗು ವುದು, ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಓದತಕ್ಕ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಏನಿರುವುದು, ಉದ್ಯೋಗದ ಅವಕಾಶ ಹೇಗೆ ವಿಸ್ತೃತವಾಗುವುದು, ಆಹಾರಪದಾರ್ಥಗಳು, ಹತ್ತಿಬಟ್ಟೆ, ಕಬ್ಬಿಣ, ಮುಂತಾದವು ಗಳ ಪೂರೈಕೆ ಯಾವ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನೆಲ್ಲ ಅಗಣನೆ (estimate) ಮಾಡಿ

ಆರ್ಥಿಕ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ವ್ಯಾಪಾರ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು, ಮಾರಾಟವೆಷ್ಟು, ಸಿಲ್ಕು ದಾಸ್ತಾನು ಎಷ್ಟು, ಇದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಉಗ್ರಾಣ ಸ್ಥಳವೆಷ್ಟು ಎಂಬ ವಿವರಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳ ಖಚಿತ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ರಚಿಸತಕ್ಕದ್ದು. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನೂ ಸಹ ತನ್ನ ಭವಿಷ್ಯದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವಲ್ಲಿ ವೈಯಕ್ತಿಕ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಮುನ್-ಅಂದಾಜುಮಾಡಿ ಸೂಕ್ತ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವನು. ಮುನ್-ಅಂದಾಜಿನ ಪ್ರಯೋಗ ತಂತ್ರ ವಿವಿಧಪ್ರಕಾರವಾಗಿರಬಹುದು ಕೇವಲ ತಜ್ಞರ ಊಹೆಯಿಂದ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು, ಅಥವಾ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಕ್ರಮದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಯಾವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದರೂ ಹಿಂದಿನ ಮಾಹಿತಿಗಳ ಮತ್ತು ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆಯೇ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು ಎಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ.

2 ಕಾಲಸರಣಿ

ಕಾಲಕಾಲಕ್ಕೆ ದೊರೆಯುವ ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ಅನ್ಯ ಚಲಕಗಳ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಿ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಮಾಡಿ ತನ್ಮೂಲಕ ಅಂಥ ಚಲಕಗಳ ಭವಿಷ್ಯದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅಂದಾಜುಮಾಡುವ ಕ್ರಮವೇ ಸಾರ್ಥಕವಾದುದು ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥವಾದುದು. ಇಂಥ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಕಾಲಶ್ರೇಣಿ ಅಥವಾ ಕಾಲಸರಣಿ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಪ್ರಸಕ್ತ ಚಲಕಗಳು ಕಾಲಕ್ರಮಣದಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೀತಿ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ ಎಂದು ಕಾಲಸರಣಿಯು ನಿರೂಪಿಸುವುದು. ಹೀಗೆ ಮುನ್-ಅಂದಾಜು ಮಾಡುವುದೇ ಕಾಲಸರಣಿಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶವೆನ್ನಬಹುದು.

ಕಾಲಸರಣಿಯ ಲಕ್ಷಣಧರ್ಮಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣ ಕ್ರಮಗಳನ್ನೂ ಕುರಿತು ಈಗ ವಿಮರ್ಶಿಸೋಣ.

ಕಾಲಸರಣಿಯ ಚಲನವಲನಗಳು, ಏರಿಳಿತಗಳು ವಿವಿಧ ಹೇತುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ಪ್ರಾಕೃತಿಕ, ಕೆಲವು ರಾಜಕೀಯ, ಕೆಲವು ಸಾಮಾಜಿಕ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಧಾರ್ಮಿಕ ಹೇತುಗಳಾಗಿರಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವೊಂದು ಕಾಲಶ್ರೇಣಿಯ ನೀಳ್ಗಾಲದ ಪ್ರಗತಿಯ ಮೇಲೆ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಬೀರಿದರೆ ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಕಿರುಗಾಲದ ಅಂದರೆ ಅಲ್ಪಾವಧಿಯ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ. ಕಾಲಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ವಿವಿಧಪ್ರಕಾರದ ಬದಲಾವಣೆಗಳೂ, ಮಾರ್ಪಾಟುಗಳೂ ಅಡಗಿವೆ. ಈ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಲಕ್ಷಣಧರ್ಮಗಳನ್ನೂ ನಿರ್ಧರಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಕಾಲಸರಣಿಯ ವಿಘಟನೆ ಅಥವಾ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ, ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

3 ಕಾಲಶ್ರೇಣಿಯ ಘಟಕಗಳು

ಕಾಲಸರಣಿಯು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿರುವ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಿನ್ನ ಘಟಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ :

1. ದೀರ್ಘಕಾಲದ ಅಥವಾ ದೀರ್ಘಕಾಲದ ಪ್ರವೃತ್ತಿ (Secular Trend): T

2. ಋತುಕಾಲದ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಅಥವಾ ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಗಳು : (Seasonal Variation): S

3. ವಾಣಿಜ್ಯ ಚಕ್ರ (Business Cycle) ಅಥವಾ ಚಕ್ರೀಯ ತೊನೆದಾಟ (Cyclical Fluctuations) : C

4. ಕ್ರಮರಹಿತ ಮಾರ್ಪಾಟುಗಳು ಅಥವಾ ಅಡ್ಡಾತಿಡ್ಡಿ ಏಳುಬೀಳುಗಳು (Irregnlar Variations) : I

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಘಟಕಾಂಗವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕಾದಾಗ ಅಥವಾ ಯಾವುದಾದರೂ ಘಟಕಾಂಗವನ್ನು ವರ್ಜಿಸಬೇಕಾದಾಗ ಪ್ರಸಕ್ತ ಕಾಲಸರಣಿಯನ್ನು ವಿಘಟಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಘಟಕಾಂಗಗಳ ಯಾವುದಾದರೂ ಸೂಕ್ತವಾದ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವುದು.

ಕಾಲಸರಣಿಯ ಅವೇಕ್ಷಣಗಳು ಕಾಲಾನುಸಾರಿಣಿಯಾಗಿರುವುವು. ಚಲಕದ ಒಂದು ಕಾಲದ ಬೆಲೆಯು ಮುಂದಿನ ಕಾಲದ ಬೆಲೆಯ ಮೇಲೆ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಬೀರುವುದು. ಸಾಂಖ್ಯಿಕ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಅವು ಯದೃಚ್ಛಾ ಚಲಕ (random variable) ಗಳಾಗಿರದೆ ಕಾಲಾನುಕ್ರಮವಾದ ಸ್ವಸಹಸಂಬಂಧ (auto-correlation) ವುಳ್ಳ ಚಲಕಗಳಾಗಿರುವುವು. ಇಲ್ಲಿ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಅನುಪೂರ್ವಿಯು ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಮತ್ತು ಸಾರಗರ್ಭಿತವಾದ ಸಂಗತಿ.

4 ಕಾಲಸರಣಿಯ ಗಣಿತ ಪಡಿಕಟ್ಟು (Mathematical Model)

ಮೇಲೆ ನಮೂದಿಸಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಘಟಕಾಂಗಗಳೂ ಯೋಗಾತ್ಮಕವಾಗಿ (additive) ಅಥವಾ ಗುಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ (multiplicative) ಒಟ್ಟು ಸೇರಿ ಕಾಲಸರಣಿಯಾಗಿ ಪರಿಣಮಿಸುತ್ತದೆ. ದೀರ್ಘಕಾಲ ಪ್ರವೃತ್ತಿ, ಪಾರ್ವಣ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ವಾಣಿಜ್ಯಚಕ್ರಗಳು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಕಾಲಚರದ ಸ್ತಿಮಿತ ಫಲನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಅನುಭವದಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಟಕಾಂಗವಾದ ಅಡ್ಡಾದಿಡ್ಡಿ ಚಲನೆ ಅಥವಾ ಅವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಏಳುಬೀಳುಗಳಿಗೆ ಈ ಗುಣವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಯೋಗಾತ್ಮಕ ಪ್ರತಿಕೃತಿ ಅಥವಾ ಪಡಿಕಟ್ಟಿನ (model) ಮೇರೆಗೆ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಅಂಕಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉಪರೋಕ್ತ. ನಾಲ್ಕು ಘಟಕಾಂಗಗಳ ಸಂಕಲಿತ ಅಂಡಕೆ ಯೋಗ

ಫಲವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕಾಲಸರಣಿಯ ದತ್ತಾಂಶ ಅಥವಾ ಅವೇಕ್ಷಣೆಯನ್ನು Y ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಈ ಯೌಗಿಕ ಪಡಿಕಟ್ಟಿನ (additive model) ಮೇರೆಗೆ ಇದನ್ನು

$$Y = T + S + C + I$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಕಾಲಸರಣಿಗೆ ಗುಣಾತ್ಮಕ ಪಡಿಕಟ್ಟನ್ನು (multiplicative model) ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಇದೇ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು

$$Y = T \times C \times S \times I$$

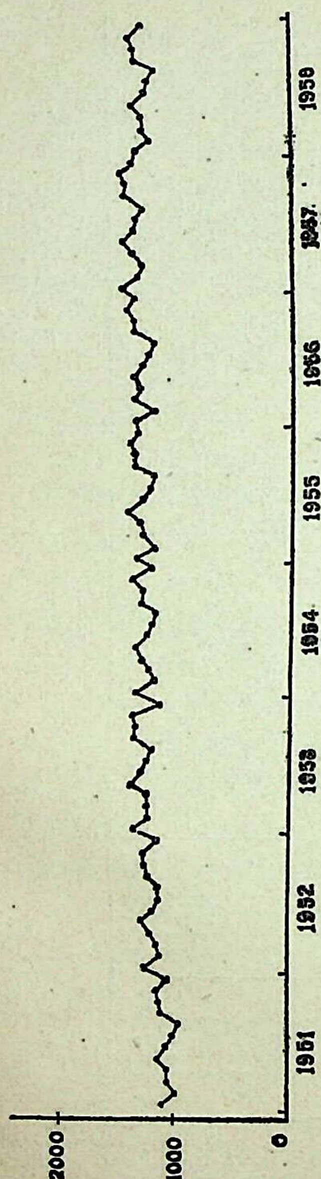
ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಸಂಭವ ಸ್ವತಂತ್ರ (stochastic independent) ಚಲಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಯೌಗಿಕ ಪಡಿಕಟ್ಟನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಸಾಧುವಾಗುವುದು. ಅವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಅಂತರ ಪ್ರಭಾವ (interaction) ಏನಾದರೂ ಇದ್ದರೆ ಆ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಈ ಪಡಿಕಟ್ಟು ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಗುಣಾತ್ಮಕ ಪಡಿಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಘಟಕಾಂಗಗಳ ಅನ್ಯೋನ್ಯಾವಲಂಬಿ (mutually dependent) ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯೂ ವಾಣಿಜ್ಯ ಚಕ್ರವೂ ದೀರ್ಘಕಾಲ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಫಲನಗಳಾಗಿರುವುವು. ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಪರಿಣಾಮ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯೂ ಹೆಚ್ಚುವುದು. ಆದರೆ ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವುದು. ಹೀಗೆಯೇ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಬೆಲೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಚಕ್ರೀಯ ತೊನೆದಾಟವು ಹೆಚ್ಚುವುದು. ಕಾಲಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಈ ವಿಧವಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವುದರಿಂದ ಗುಣಾತ್ಮಕ ಪಡಿಕಟ್ಟನ್ನೇ ಆಧಾರ ಸಂಬಂಧವನ್ನಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕಾಲಸರಣಿಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ನಡೆಸುವುದು ಸಮಂಜಸವಾಗಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ.

ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ 1951 ರಿಂದ 1958 ರವರೆಗೆ ಪ್ರತಿತಿಂಗಳಲ್ಲೂ ಉತ್ಪಾದನೆಯಾದ ಹತ್ತಿನೂಲಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 10·1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. (ಮುಂದಿನ ಪುಟ ನೋಡುವುದು.)

ಈ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಕಾಲಸರಣಿಯ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು 10·1ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಸ್ವರೂಪ ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ಮನವರಿಕೆಯಾಗುವುದು. ಆಗಾಗ್ಗೆ ಆಗುತ್ತಿರುವ ಸಣ್ಣ ಪುಟ್ಟ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಮೇಲು ನೋಟದಿಂದ ನೋಡಿದರೆ ಹತ್ತಿನೂಲಿನ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಏರು ಮುಖವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದನ್ನೇ ದೀರ್ಘ ಕಾಲಪ್ರವೃತ್ತಿ ಎನ್ನುವರು.

ಕೋಷ್ಟಕ 10.1: ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿನೂಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ (1951–1958 ಲಕ್ಷ ಪೌಂಡುಗಳಲ್ಲಿ)

ತಿಂಗಳು	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
ಜನವರಿ	1107	1288	1384	1360	1392	1412	1581	1449
ಫೆಬ್ರವರಿ	1004	1145	1228	1205	1247	1253	1404	1314
ಮಾರ್ಚಿ	1056	1158	1244	1265	1331	1420	1390	1382
ಏಪ್ರಿಲ್	1069	1201	1259	1327	1380	1387	1476	1398
ಮೇ	1133	1302	1399	1389	1460	1454	1558	1482
ಜೂನ್	1062	1170	1306	1281	1352	1371	1455	1382
ಜುಲೈ	1007	1129	1259	1233	1298	1303	1424	1331
ಆಗಸ್ಟ್	991	1119	1211	1201	1265	1270	1388	1300
ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್	1107	1242	1362	1338	1413	1439	1526	1449
ಅಕ್ಟೋಬರ್	1120	1267	1352	1339	1419	1452	1543	1466
ನವೆಂಬರ್	1150	1278	1380	1405	1478	1501	1585	1500
ಡಿಸೆಂಬರ್	1070	1172	1164	1269	1401	1449	1477	1396



ಚಿತ್ರ 10.1 : ಭಾರತದೇಶದಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿ ನೂಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಚಿತ್ರ

ಈಗ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘಟಕಾಂಗವನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಲಕ್ಷಣ ಧರ್ಮಗಳು ಯಾವುವು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸುವ ಬಗೆ ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕುರಿತು ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

5 ದೀರ್ಘಕಾಲದ ಪ್ರವೃತ್ತಿ (Secular trend)

ಆಗಾಗ್ಗೆ ಒದಗುವ ಸಣ್ಣಪುಟ್ಟ ಏರುಪೇರುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಎದ್ದು ಕಾಣುವ ನೀಳ್ಗಾಲದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯೇ ದೀರ್ಘಕಾಲದ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಎನಿಸುವುದು. ಇದು ಹಲವು ಬಗೆಯಾಗಿರುವುದು; ಸರಳ ರೇಖೀಯ, ಪರಾವೃತ್ತೀಯ ಮತ್ತು ಘಾತೀಯ ಫಲನದ (exponential function) ಪ್ರವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ರೇಖೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಆರ್ಥಿಕ ಕಾಲ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಕಾಲಮಾನವು 1 ವರ್ಷವಿರಬಹುದು ಅಥವಾ 1 ತಿಂಗಳಿರಬಹುದು. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಷಪಾದ ಅಂಶಕೆ ಕಾಲುವರ್ಷವಾಗಿರುವುದು. ಮತ್ತೆ ಕೆಲವೆಡೆ 1 ವಾರವಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ 1 ದಿವಸವಾಗಿರಬಹುದು. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯ ಮಾನವೂ ಇರಬಹುಹುದು. ಕಾಲಚರವನ್ನು x ಎಂತಲೂ ಕ್ರಮಾನುಗತವಾದ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು y ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ

$$y = a + bx$$

ಎಂಬುದೇ ದೀರ್ಘಕಾಲ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಸಂಬಂಧವಾಗುವುದು; ಇಲ್ಲಿ 'b' ಎಂಬುದು

ನೀಳ್ಗಲದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ರೇಖೆಯ ಓಟ ಅಥವಾ ಪ್ರವಣತೆ (slope) ಆಗಿರುವುದು. ಕಾಲಚರವನ್ನು ಕೆಲವರು t ಎಂತಲೂ ಸೂಚಿಸುವರು.

ದೀರ್ಘಕಾಲದ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಲು ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ a ಮತ್ತು b ಈ ಅಚರ ರಾಶಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯ ಓಟ ಮತ್ತು y–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಛೇದ ಇವೆರಡನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಅವೇಕ್ಷಣೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಹಾಯಿಸಬೇಕು.

ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಹಾಳಿತವಾಗಿ ಒಪ್ಪುವಂತೆ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೂರ್ದಿಸಲು ಕೆಳಕಂಡ 5 ವಿಧಾನಗಳಿವೆ.

1. ಸ್ವತಂತ್ರ ಕೈಕರಣ ವಿಧಾನ (free hand method).
2. ಆಯ್ದ ಬಿಂದುಗಳ ವಿಧಾನ (selected points method).
3. ಸಮಾರ್ಧ–ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ (semi-averaging method).
4. ಸಂಚಾರಿ–ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ (moving average method).
5. ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗವಿಧಾನ (method of least squares).

6 ಸ್ವತಂತ್ರ ಕೈಕರಣ ವಿಧಾನ

ಇದನ್ನು ಆಲೇಖ ಚಿತ್ರವಿಧಾನ (graphical method) ಎಂತಲೂ ಹೇಳುವರು. ಚೌಕುಳಿ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅಂಕನ ಮಾಡಿ ದೊರಕುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿ ಪರಿಶೋಧಕನು ಸೂಕ್ತವೆಂದು ಭಾವಿಸುವ ಪ್ರಕಾರ ಬಿಂದುಗಳ ಹತ್ತಿರ ಸಮಂಜಸವಾಗಿ ಹಾಯ್ದುಹೋಗುವಂಥ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದ ಮೇಲೆ ಇದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನವು ಪರಿಶೋಧಕನ ಸ್ವಂತ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪರಿಶೋಧಕರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆಯುವ ಸಂಭವವಿದೆ. ವೈಯಕ್ತಿಕ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಲಭಿಸುವ ಈ ಫಲಗಳು ಅಷ್ಟು ಖಾತರಿಯಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಇದೇ ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ದೋಷ. ಬಹಳ ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲು ಮಾತ್ರ ಇದನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಹೊಸಬರು, ಕಲಿಕೆಯವರು ಈ ವಿಧಾನವನವನ್ನು ಬಳಸುವುದು ತರವಲ್ಲ.

7 ಆಯ್ದ ಬಿಂದುಗಳ ವಿಧಾನ

ಕಾಲಸರಣಿಯ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಂಥ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯೇ

ದೀರ್ಘಕಾಲ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ರೇಖೆಯಾಗುವುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಮುಂದುಗಡೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ತರುವಾಯದ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೂ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳುವುದು ರೂಢಿ.

ಕೋಷ್ಟಕ 10·2ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಭಾರತದಲ್ಲಿ 1953 ರಿಂದ 1962 ರವರೆಗಿನ ಹತ್ತಿ ನೂಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟ ಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

1954 ಮತ್ತು 1961 ಇಸ್ವಿಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡರೆ ವಾಂಛಿತ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯ ಓಟ $(1584 - 1301) \div 7 = 40{\cdot}4$ ಆಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ xನ್ನು 1953 ರಿಂದ ಅಳೆಯತಕ್ಕದ್ದು. ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y = 1260{\cdot}6 + 40{\cdot}4x$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೇರೆಗೆ ಆಯಾ ವರ್ಷಗಳ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ 10·2ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 3ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

1953 ಮತ್ತು 1962 ಇಸ್ವಿಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದರೆ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯ ಓಟ $(1579 - 1296) \div 9 = 31{\cdot}4$ ಆಗುವುದು ಮತ್ತು ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y = 1296 + 31{\cdot}4x$$

ಎಂದಾಗುವುದು ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ದೊರೆತ y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 10·2ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 4ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಎರಡು ಕ್ರಮಗಳಿಂದ ದೊರೆತ ಅಂದಾಜಿನ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿವೆ. ಮೊದಲನೆಯದರ ಪ್ರಕಾರ ವಾರ್ಷಿಕ ಪ್ರವೃತ್ತಿ 40·4 ಇರುವುದು. ಆದರೆ ಎರಡನೆಯದರ ಪ್ರಕಾರ ವಾರ್ಷಿಕ ಪ್ರವೃತ್ತಿ 31·4 ಇರು ವುದು. ಆಯ್ದುಕೊಂಡ ವರ್ಷಗಳ ವತ್ಯಾಸದಿಂದ ಇಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಕಡಮೆಯಾಗುವ ಸಂಭವವಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಿಧಾನವು ಅಷ್ಟು ಸಮರ್ಪಕವಾದದ್ದಲ್ಲ. ಸ್ವತಂತ್ರ ಕೈ ಕರಣ ವಿಧಾನಕ್ಕಿಂತ ಇದು ಉತ್ತಮವಾದ ವಿಧಾನವಾದರೂ ಬಿಂದುಗಳ ಆಯ್ಕೆಯಲ್ಲಿ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಬೆರೆತಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಿಧಾನವು ದೋಷರಹಿತವಾದುದಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸದಿರುವುದು ಮೇಲು.

ಕೋಷ್ಟಕ 10·2

ಭಾರತ ದೇಶದ ಹತ್ತಿನೂಲಿನ ತಿಂಗಳ ಸರಾಸರಿ ಉತ್ಪತ್ತಿ 1953–62

ವರ್ಷ	ಉತ್ಪತ್ತಿ (ಲಕ್ಷ ಪೌ.)	ಅಗಣಿಸಿದ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆ		
		1ನೇ ಸಮೀಕರಣ	2ನೇ ಸಮೀಕರಣ	ಸಮರ್ಧ–ಸರಾಸರಿ
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1953	1296	1260·6	1296·0	1319·7
1954	1301	1301·0	1327·4	1344·0
1955	1370	1341·4	1358·9	1368·4
1956	1392	1381·8	1390·3	1392·8
1957	1483	1422·3	1421·8	1417·1
1958	1404	1462·7	1453·2	1441·5
1959	1436	1503·1	1484·7	1465 8
1960	1448	1543·6	1516·1	1490·2
1961	1584	1584·0	1547 6	1514·6
1962	1579	1624·4	1579·0	1531·9

8 ಸಮರ್ಧ–ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ

ದತ್ತ ಕಾಲಸರಣಿಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮರ್ಧ ಖಂಡಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಪ್ರತಿಖಂಡದ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇವುಗಳನ್ನು ಆಯಾ ಖಂಡದ ಮಧ್ಯ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಆಯ್ಕೆ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತು ಹಚ್ಚಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹತ್ತಿನೂಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಮೊದಲನೆಯ 5 ವರ್ಷಗಳ ಸರಾಸರಿ ಉತ್ಪತ್ತಿ 1368·4 ಲಕ್ಷ ಪೌಂಡುಗಳು. ಎರಡನೆಯ 5 ವರ್ಷಗಳ ಸರಾಸರಿ ಉತ್ಪತ್ತಿ 1490·2 ಲಕ್ಷ ಪೌಂಡುಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1955ನೇ ಮತ್ತು 1960ನೇ ಇಸ್ವಿಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯ ಓಟ $(1490{\cdot}2 - 1369{\cdot}4) \div 5$ ಅಥವಾ 24·36 ಆಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ

$$y = 1368{\cdot}4 + 24{\cdot}36x$$

ಎಂಬುದು ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ xನ್ನು 1955 ರಿಂದ ಅಳೆಯತಕ್ಕದ್ದು. 1953ನ್ನು ಕಾಲವನ್ನಳೆಯುವ ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y = 1319{\cdot}68 + 24{\cdot}36x$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹಾಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ಬಂದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 10·2ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 5ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ 1963ರಲ್ಲಿ ಆಗಬಹುದಾದ ಹತ್ತಿನೂಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ಅಂದಾಜು 1563·3 ಲಕ್ಷ ಪೌಂಡುಗಳು ಆಗುವುದು (ತಿಂಗಳ ಸರಾಸರಿ ಉತ್ಪತ್ತಿ).

ದತ್ತಕಾಲಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿದ್ದರೆ ಮಧ್ಯದ ಅವೇಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ವಿಲೆ ಮಾಡುವುದು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಏಳುವುದು. ಇದನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಲು ಮೂರು ದಾರಿಗಳಿವೆ.

1. ಮಧ್ಯದ ಅವೇಕ್ಷಣೆ ಬೆಲೆಯ ಅರ್ಧವನ್ನು ಪ್ರತಿ ಖಂಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು.

2. ಮಧ್ಯದ ಅವೇಕ್ಷಣೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಪ್ರತಿ ಖಂಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿಸುವುದು.

3. ಮಧ್ಯದ ಅವೇಕ್ಷಣೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟೇ ಬಿಡುವುದು.

ವಿಶೇಷ ಸೂಚನೆ : ದೀರ್ಘಕಾಲ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲದೆ ವಕ್ರರೇಖೆ (curved line) ಯಾಗಿದ್ದಾಗ ಅದನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಪಡಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಪರಾಮಿತಿಗಳು (parameters) ಇರುವುವೋ ಅಷ್ಟು ಸಮ ಖಂಡಗಳನ್ನಾಗಿ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪ್ರವೃತ್ತಿಯು ಪರವಲಯ (parabola)ವಾದರೆ, ಇದಕ್ಕೆ ಮೂರು ಪರಾಮಿತಿಗಳು ಇರುವುವು. ಆದುದರಿಂದ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಮೂರು ಸಮ ಪಾಲಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಖಂಡದ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇವುಗಳಿಂದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಪರವಲಯವನ್ನು ಈಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

9 ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ

ದತ್ತಕಾಲ ಸರಣಿಯಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉದ್ದದ ಕ್ರಮಾಗತ ಖಂಡಗಳ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳಿಂದಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಸರಣಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನವೆಂದು ಹೆಸರು. ಭಾರತ ದೇಶದ ಹತ್ತಿನೂಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಸರಣಿಯನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಒಂದು ಅವೇಕ್ಷಣೆಯ ಜೊತೆಗೆ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಆ ಮೂರು ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಡುವಣ ಕಾಲ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಂವಾದಿ

ಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಇದನ್ನೇ ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮುಮ್ಮಡಿ ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 10·3ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 4ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ಮೂರು ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬದಲು ನಾಲ್ಕು, ಐದು, ಆರು, . . . ಮುಂತಾದ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಕಾಲ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿನ ಏರುಪೇರುಗಳು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯು ಹೆಚ್ಚು ನುಣುಪಾಗು ವುದು. ಕಾಲಸರಣಿಯು ಆವರ್ತಕ (periodic) ವಾಗಿದ್ದರೆ ಆರ್ವತನ ನೀಳದಷ್ಟು ಖಂಡದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡುತ್ತ ಹೋದಲ್ಲಿ ತಿದ್ದಿದ ಅಥವಾ ಸಂಸ್ಕರಿಸಿದ ಶ್ರೇಣಿಯು ರೇಖೀಯ (linear) ವಾಗಿರುವುದು. ಆದರೆ ಆವರ್ತದ ಉದ್ದವು ಖಚಿತ ವಾಗಿ ಗೊತ್ತಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಮತ್ತು ಏಕರೂಪವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಯತ್ನ ಮತ್ತು ವಿಫಲ (trial and error) ಕ್ರಮದಿಂದ ಆವರ್ತದ ಉದ್ದವನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗುವುದು (10·3ನೇ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪುಟದಲ್ಲಿ ನೋಡುವುದು)

ನಾಲ್ಕು, ಆರು . . . . ಮುಂತಾದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ ಒಂದು ತೊಡಕು ಏರ್ಪಡುವುದು. 1953 ರಿಂದ ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು 10·3ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 6ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಸರಾಸರಿಯ ಬೆಲೆ 1339·8 ಎಂಬುದು ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷದ ಅವಧಿಯ ಮಧ್ಯಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಬೆಲೆಯಾಗುವುದು. ಈ ಮಧ್ಯ ಭಾಗವು ಈಗ 1954ನೇ ಇಸ್ವಿಯ ಕೊನೆ ಮತ್ತು 1955ನೇ ಇಸ್ವಿಯ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗು ವುದು. ಆದರೆ ಇತರ ಬೆಲೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ವರ್ಷದ ನಡುವಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸರಾಸರಿಯೂ ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ವರ್ಷದ ಮಧ್ಯಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಕ್ರಮಾಗತವಾದ ಎರಡು ನಾಲ್ವಡಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಈ ಬೆಲೆಯು ಮುಂದಿನ ವರ್ಷದ ಮಧ್ಯವರ್ತಿ ಬೆಲೆಯಾಗುವುದು. ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 1339·8ಬೆಲೆಯು, 1954ರ ಅಂತ್ಯಕ್ಕೂ, 1386·5 ಬೆಲೆಯು 1955ರ ಅಂತ್ಯಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆ 1363·15 (ಅಥವಾ ದಶಾಂಶವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 1363) 1955ನೇ ಇಸ್ವಿಯ ಮಧ್ಯಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿ ಬೆಲೆ ಯಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ ದೊರೆತ ಬೆಲೆಗೆ ಮಧ್ಯಕೃತ ನಾಲ್ವಡಿ ಸರಾಸರಿ ಎಂದು ಹೆಸರು. ದುಪ್ಪಟ್ಟು ತೆಗೆದ ನಾಲ್ವಡಿ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ 7ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅಗಣನ ಮಾಡುವುದ ರಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕುಂದುಕೊರತೆಗಳಿರುವುವು. ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲೂ ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳ ಅಗಣನವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ

ಕೋಷ್ಟಕ 10·3

ಭಾರತ ದೇಶದ ಹತ್ತಿನೂಲಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ 1953–1962 ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಗಳ ಗಣನೆ

ವರ್ಷ	ಉತ್ಪತ್ತಿ (ಲಕ್ಷ ಪಾ.)	ಮುಮ್ಮಡಿ ಮೊತ್ತ	ಮುಮ್ಮಡಿ ಸರಾಸರಿ	ನಾಲ್ಮಡಿ ಮೊತ್ತ	ನಾಲ್ಮಡಿ ಸರಾಸರಿ	ಮಧ್ಯಕೃತ ನಾಲ್ಮಡಿ ಸರಾಸರಿ
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1953	1296	....	....	....	....	....
1954	1301	3967	1323·2	....	....	....
1955	1370	4063	1354·3	5359	1339·8	1363
1956	1392	4245	1415·0	5546	1386·5	1399
1957	1483	4279	1426·3	5649	1412·2	1420
1958	1404	4323	1441 0	5715	1428 7	1436
1959	1436	4288	1429·3	5771	1442·8	1455
1960	1448	4468	1489·3	5872	1468·0	1490
1961	1584	4611	1537 0	6047	1511·7	....
1962	1579	....	....	....	....	

ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಗಳು ಸಿಗಲಾರವು. 10.3ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 7ನೇ ಕಲಮಿನ ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳೂ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳೂ ಖಾಲಿಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಎರಡನೆಯದಾಗಿ, ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ಗಣಿತ ಫಲನದ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಿಸಲು (ಪ್ರೊಜೆಕ್ಟ್ ಮಾಡಲು) ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಇದು ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನದ ಭಾರೀ ಕೊರತೆಯೇ ಆಗುವುದು. ಆದಾಗ್ಯೂ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುವುದು. ಅಲ್ಲದೆ ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಲು ಈ ವಿಧಾನ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿರುವುದು.

10 ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗವಿಧಾನ

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ಬಗೆಯ ದೋಷ ಇದ್ದೇ ಇರುವುದೆಂಬುದನ್ನು ವಿಶದಪಡಿಸಿದ್ದೇವೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾದರೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ಕ್ರಮವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುವ ಫಲವು ವ್ಯಕ್ತಿಗತ ಅಥವಾ ವ್ಯಕ್ತಿನಿಷ್ಠ (subjective) ವಾಗಿಲ್ಲದೆ ಜ್ಞೇಯಗತ ಅಥವಾ ವಸ್ತುನಿಷ್ಠ (objective) ವಾಗಿರುವುದು ದತ್ತ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹಾಳಿತವಾಗಿ ಪೊರ್ದಿಸಲು ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗವಿಧಾನ (method of least squares) ವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ

$$y = a + bx$$

ಇರುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿನ a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಪರಾಮಿತಿಗಳು ; ದತ್ತ ಅವೇಕ್ಷಣೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಪರಾಮಿತಿಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇವುಗಳ ವಾಸ್ತವಿಕ ಬೆಲೆಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದರೂ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x, y ಚಲಕಗಳ ಅವೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ ಈ ಸಾಮ್ಯವು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗಲಾರದು. ಏಕೆಂದರೆ ಅಳತೆಯಲ್ಲಾಗತಕ್ಕ ಪ್ರಮಾದಗಳಿಂದ ಅಥವಾ ಯದೃಚ್ಛೆಯಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಕಾರಣ (random causes) ಗಳಿಂದ y ಗಳಲ್ಲಿ ಏರುಪೇರಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆ. ಹೀಗಾಗಿ $a + bx$ನ ಬೆಲೆಯು yಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ; ವ್ಯತ್ಯಾಸವು $y - (a + bx)$; ಇದನ್ನು ವಿಭ್ರಮ ಎಂದು ಹೇಳುವುದುಂಟು. ವಿಭ್ರಮಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ ಕನಿಷ್ಠತಮವಾಗುವಂತೆ a, b ಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದೇ ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗ ಸಿದ್ಧಾಂತ. ಇದರ ಮೇರೆಗೆ a ಮತ್ತು b ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಲಬ್ಧವಾಗುವ

ಸಮಿಾಕರಣಗಳಿಗೆ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ (ನಾರ್ಮಲ್) ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಹೆಸರು ಎಂಬು ದಾಗಿ ಹಿಂದೆ ತಿಳಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಯಾವುವೆಂದರೆ

$$\sum y = \sum a + \Sigma bx \quad .... \quad (10{\cdot}1)$$

ಮತ್ತು
$$\Sigma xy = a\sum x + b\Sigma x^2 \quad .... \quad (10{\cdot}2)$$

ಕಾಲಮಾನದ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಅವೇಕ್ಷಿತ ಸರಣಿಯ ಮಧ್ಯಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿ ದರೆ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅತಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಕಾಲಮಾನಗಳು ಅಥವಾ ಅವಧಿಗಳು (periods) ಸಮವಾಗಿರುವುದ ಲ್ಲದೆ ಮಾನಗಳು ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುವು ಮತ್ತು ಪೂರ್ವಾರ್ಧದಲ್ಲಿ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಉತ್ತರಾರ್ಧದಲ್ಲಿ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಇರುವುವು. ಇದರಿಂದ $\sum x = 0$ ಆಗುವುದು. ಹೀಗಾಗಿ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು $\Sigma y = na$ ಮತ್ತು $\sum xy = b\Sigma x^2$ ಎಂಬ ಬಿಡಿಬಿಡಿಯಾದ ಸುಲಭ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುವುವು. ಇಲ್ಲಿ $n =$ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ a, b ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾದ ಸಿಮೆಂಟಿನ ಬಗ್ಗೆ ಅಂಕಿಅಂಶಗಳನ್ನು 10·4ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅವುಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಅವಕ್ಕೆ ಹಾಳಿತವಾದ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸುವ ಕ್ರಮ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಕಾಲ ಮಾನವನ್ನು ಅಳೆಯಲು 1958ನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿ ಅರಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. 2ನೇಕಲಮಿಂದ $\Sigma y = 569$ ಮತ್ತು 4ನೇ ಕಲಮಿಂದ $\Sigma xy = 349$. ಆದುದ ರಿಂದ ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು :

$$9a = 569 \quad .... \quad (10{\cdot}1)$$

ಮತ್ತು
$$60b = 349 \quad .... \quad (10{\cdot}2)$$

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು $a = 63{\cdot}22$; $b = 5{\cdot}82$ ಎಂಬ ಫಲಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು $y = 63{\cdot}22 + 5{\cdot}82x$ ಎಂದು ನಿರೂ ಪಿಸಬಹುದು. 1954ರನ್ನು ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅಳೆದ ಕಾಲಮಾನ ವನ್ನು x ವರ್ಷಗಳೆಂದು ಗಣನೆ ಮಾಡತಕ್ಕದ್ದು. ಈ ಸಮೀಕರಣದ x–ನ ಬೆಲೆ ಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ದೊರೆವ ಬೆಲೆ y-ಯು ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆ ಎಂದೂ ಹೆಸರು. ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 5ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆ ಗಳಿಗೂ (ಸ್ತಂಭ 5) ಮತ್ತು 3ನೇ ಕಲಮಿನ ಅವೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಇರುವ ನಿಕಟತೆ

ಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮುಂದಿನ ವರ್ಷಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಬಹುದು.

ಕೋಷ್ಟಕ 10·4

ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಸಿಮೆಂಟಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ : ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಗಳ ಗಣನೆ

ವರ್ಷ x	ಉತ್ಪತ್ತಿ y: (ಲಕ್ಷ ಟನ್)	$x-1958 = X$	Xy	ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆ	X^2y	ಪರವಲಯಕ್ಕೆ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆ
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1954	44	—4	—176	39·94	704	41 81
1955	45	—3	—135	45·76	405	46·23
1956	49	—2	— 98	51 58	196	51 05
1957	56	—1	— 56	57·40	56	56·27
1958	61	0	0	63 22	0	61·89
1959	68	1	68	69 04	68	67·91
1960	78	2	156	74·86	312	74·33
1961	82	3	246	80 68	738	81·15
1962	86	4	344	86·50	1376	88 37
ಮೊತ್ತ	569	0	349	568·98	3855	569·01

11 ವಕ್ರ ರೇಖೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಗಳು (Curvilinear trends)

ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗ ವಿಧಾನದಿಂದ ವಕ್ರ ರೇಖೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಗಳನ್ನೂ ಸಹ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪರವಲಯ (parabola) ಮತ್ತು ಘಾತೀಯ (exponential) ರೇಖೆಗಳು ಮುಖ್ಯವಾದುವು ಭಾರತ ದೇಶದ ಸಿಮೆಂಟಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿಯ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳಿಗೆ (ಕೋಷ್ಟಕ (10·4) $y = a + bX + cX^2$ ಎಂಬ ಪರವಲಯವನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಲು 10·4ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ X^2y ಎಂಬ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಈಗ ದೊರೆವ 3 ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೀಗಿರುವುವು.

$$\Sigma a + b\Sigma X + c\Sigma X^2 = \Sigma y \qquad .... \quad (11{\cdot}1)$$

$$a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 = \Sigma xy \qquad .... \quad (11{\cdot}2)$$

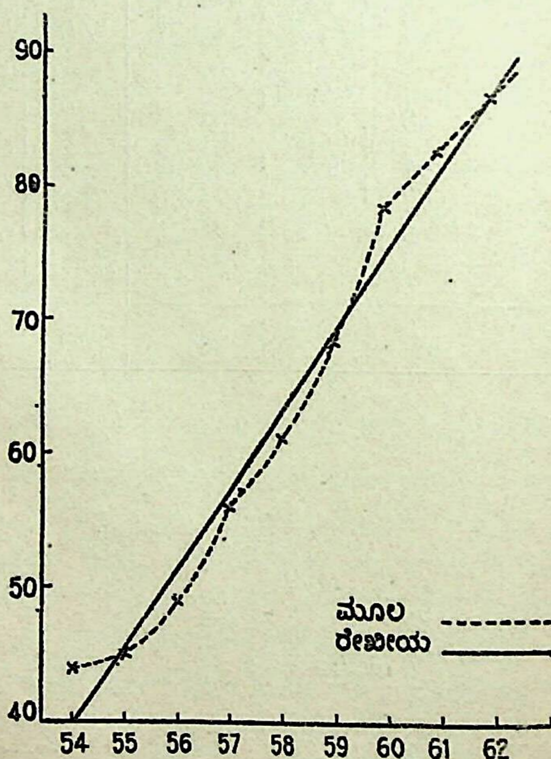
$$a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 = \sum x^2 y \quad .... \quad (11{\cdot}3)$$

ಈ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೂ ಬಿಡಿಸಿ a, b, c ಪರಾಮಿತಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಪಡಿಸಬಹುದು. x–ನ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಅಂತರದ ಮಧ್ಯಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ $\Sigma X = 0$, $\Sigma X^3 = 0$ ಮತ್ತು $\Sigma X^2 = 60$ ಮತ್ತು $\Sigma X^4 = 708$ ಎಂದು ಸುನಾಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಲು ಪ್ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಈ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತವೆ.

$$9a + 60c = 569 \quad .... \quad (11{\cdot}4)$$

$$60b = 349 \quad .... \quad (11{\cdot}5)$$

$$60a + 708c = 3855 \quad .... \quad (11{\cdot}6)$$



ಚಿತ್ರ 10.2 : ಭಾರತದೇಶದಲ್ಲಿ ಸಿಮೆಂಟಿನ ಉತ್ಪತ್ತಿ

ರೇಖೆಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಳಸಿದ ಅದೇ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ 10·2 ರಿಂದ ($60b = 349$) bಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ bಯ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉಳಿದ ಎರಡು ಸಮಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ $a = 61{\cdot}89$, $c = 0{\cdot}2$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪರವಲಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y = 61{\cdot}89 + 5{\cdot}82X + 0{\cdot}2X^2 \quad .... \quad (11{\cdot}4)$$

ಎಂದಾಗುವುದು (1958ರಿಂದ Xನ್ನು ಅಳೆಯತಕ್ಕದ್ದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು). ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದ y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 10·4ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 7ನೇ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಚೌಕಳಿ ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಅಂಕಿತ ಮಾಡಿ ದೊರೆತ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಪರವಲಯವು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಒತ್ತಾಗಿ ಹಾದುಹೋಗುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

12 ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಗಳು (Seasonal Variations)

ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಋತುಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ, ಆರ್ಥಿಕ, ಸಾಮಾಜಿಕ ಅಥವಾ ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ವಿವರ್ತಗಳು ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಬೆಲೆಗಳು ತಿಂಗಳು ತಿಂಗಳಿಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವುವು ಮತ್ತು ಕ್ಲುಪ್ತವಾದ ಕೆಲವು ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಕಡಮೆಯಾಗಿಯೂ ಇರುವುವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ದಿನಸಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಸುಗ್ಗಿಯಲ್ಲಿ ಕಡಮೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಬ್ಬ ಹರಿದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಹೂವು ತರಕಾರಿಗಳ ಬೆಲೆ ತುಟ್ಟಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ರೈಲು ಪ್ರಯಾಣದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಏಪ್ರಿಲ್, ಮೇ, ಜೂನ್ ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆ ಅತ್ಯಧಿಕವಾಗಿರುವುದು ; ಆಗಸ್ಟ್, ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಕಡಮೆಯಾಗಿರುವುದು. ಮಕ್ಕಳ ಜನನ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಈ ತೆರನಾದ ಅನ್ಯಾದೃಶ್ಯ ಘಟನೆ ಗೋಚರವಾಗುವುದು. ಜೂನ್ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಹುಟ್ಟುವ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅತ್ಯಧಿಕವಾಗಿರುವುದು. ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಾನ ಅಕ್ಟೋಬರ್ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಜನಿಸುವ ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ. ಎಲ್ಲಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಮಕ್ಕಳು ಹುಟ್ಟುವ ತಿಂಗಳೆಂದರೆ ಜನವರಿ. ಈ ವಿಧವಾಗಿ ಪರ್ವಪರ್ವಕ್ಕೂ ಆಗುವ ಬದಲಾವಣೆ ಅಥವಾ ಏರಿಳಿತಕ್ಕೆ ಪಾರ್ವಣ ವಿಚಲನೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಹೀಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವ ವಿವರ್ತಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಯಾವ ಋತುವಿನಲ್ಲಿ ಅದು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಪರ್ವಗಳ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಗಿಂತ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ಪರ್ವದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪ್ರತಿಶತ ಹೆಚ್ಚಿರುವುದು ಅಥವಾ ಕಡಮೆಯಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು

15

ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪಾರ್ವಣ ಸೂಚ್ಯಂಕ ಅಥವಾ ಪಾರ್ವಣ ತೋರಂಕ (seasonal index) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ತಿಂಗಳುಗಳನ್ನೇ ಪರ್ವಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡುವುದು ಹೆಚ್ಚು ರೂಢಿ. ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಷಪಾದ (quarter) ಅಂದರೆ 3 ತಿಂಗಳ ಅವಧಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದೂ ಉಂಟು. ಪಾರ್ವಣ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಈಗ ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

13 ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕರಣ ಪದ್ಧತಿ

ನೀಳ್ಗಾಲ ಪ್ರವೃತ್ತಿ, ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆ ಮೊದಲಾದುವುಗಳೆಲ್ಲ ಸಮ್ಮಿಳಿತಗೊಂಡು ಕಾಲಸರಣಿಯ ಬೆಲೆಗಳು ಮೂಡುತ್ತವೆಯಾದುದರಿಂದ ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ ನೀಳ್ಗಾಲ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ಕಳೆದುಹಾಕಬೇಕು. ಆದುದರಿಂದ ಹಲವು ವರ್ಷಗಳವರೆಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳಿಗೂ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳು ಬೇಕಾಗುವುವು. ಸುಮಾರು ಹತ್ತು ವರ್ಷಗಳ ಮಾಹಿತಿಗಳು ಬೇಕಾಗಬಹುದು. ಅಂದರೆ 120 ಮಾಹೆಯಾನಾ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳು ಬೇಕು. ಅಷ್ಟು ಉದ್ದವಾದ ಸರಣಿಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡುವುದು ಶ್ರಮಸಾಧ್ಯವಾದ ಕೆಲಸ. ಆದುದರಿಂದ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಪಾದಗಳಂತೆ ಶೇಖರಣೆ ಮಾಡಿದ ಕಾಲಸರಣಿಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣ ಕ್ರಮವನ್ನು ವಿಶದಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಖಾಸಗೀ ವಾಣಿಜ್ಯ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಪಾದದ ಮಾರಾಟದ ಮೊಬಲಗನ್ನು 10·5ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ (ಮುಂದಿನ ಪುಟ ನೋಡಿ).

ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಮಧ್ಯಕೃತ ನಾಲ್ವಡಿ ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು 5ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆಯಾ ತಿಂಗಳ ಆವೇಕ್ಷಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ (ratio) ಯನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ 6ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಇದನ್ನು 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದ ಗುಣನಫಲವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಮೊದಲ ಎರಡು ಪಾದಗಳ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ವರ್ಷದ ಕಡೆಯ ಎರಡು ಪಾದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ದೊರಕುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಒಟ್ಟು 16 ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಮಾತ್ರ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಪಾದಕ್ಕೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ 4 ಪ್ರವೃತ್ತಿ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ದೊರೆಯುವುವು. ಇವುಗಳನ್ನು ಬೇರೆಯಾಗಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿ 10·6ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿಪಾದಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುವ ನಾಲ್ಕು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು 7ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲೂ, ಸರಾಸರಿಯನ್ನು 8ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲೂ

ಕೋಷ್ಟಕ 10.5 : ದಕ್ಷಿಣ ವಾಣಿಜ್ಯ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಮಾರಾಟ ಗೋಷ್ವಾರೆ (000 ರೂ.ಗಳು)

ವರ್ಷ	ಪಾದ	ಬಿಕರಿ	ನಾಲ್ವಡಿ ಮೊತ್ತ	ನಾಲ್ವಡಿ ಸರಾಸರಿ	ಮಧ್ಯಕೃತ ನಾಲ್ವಡಿ ಸರಾಸರಿ	ಪ್ರವೃತ್ತಿಗೆ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ	ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆ	ಬಿಕರಿ/ಪ್ರವೃತ್ತಿ × 100	ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧ
1954	I	1708	—	—	—	—	1576	108.3	—
	II	1360	6909	1727	—	—	1617	84.1	97.6
	III	1793	6740	1685	1706.0	105.2	1659	108 1	131.8
	IV	2048	6622	1656	1670.5	122.6	1700	120.5	114.2
1955	I	1539	6590	1648	1652 0	93.1	1742	88.4	75.1
	II	1242	6552	1631	1639.5	75.7	1782	69.7	80.7
	III	1761	6487	1622	1626.5	108 2	1825	96 4	141.8
	IV	1980	6565	1641	1631.5	121.3	1865	106.2	112.5
1956	I	1504	7012	1753	1697.0	88.6	1907	78.8	76.0
	II	1320	7710	1927	1840 5	71.7	1949	67.7	87.8
	III	2208	8380	2095	2011.5	109.7	1990	110.9	163.4
	IV	2678	8998	2249	2172.0	123 3	2032	131 8	121.4
1957	I	2174	9376	2334	2296.5	94.7	2073	104 9	81.3
	II	1938	9530	2382	2363.0	82.0	2115	91.6	89.2
	III	2590	9457	2364	2373.0	109.4	2156	119 9	133.7
	IV	2832	9182	2296	2330 0	121.5	2197	128.9	109.3
1958	I	2101	8901	2225	2260.5	93.0	2239	93.9	74.2
	II	1663	8719	2180	2002 5	83.1	2280	72.9	79.2
	III	2305	—	—	—	—	2322	99.2	138.6
	IV	2650	—	—	—	—	2363	112.1	115.0

ಕೊಟ್ಟಿದೆ. 8ನೇ ಕಲಮಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಬೇಕಾದ ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು. ಈ ನಾಲ್ಕು ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 400 ಆಗಬೇಕು. ಆದರೆ ಯಥಾರ್ಥವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವು 400·8 ಇರುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಇದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ 400 : 400·8 ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಕುಗ್ಗಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ 400/400·8=0·998 ಎಂಬ ಗುಣಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ಕೋಷ್ಟಕ 10·6 : ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯ ಗಣನೆ

ವರ್ಷ ಪಾದ	1954	1955	1956	1957	1958	ಮೊತ್ತ	ಸರಾಸರಿ	ತಿದ್ದಿದ ಸರಾಸರಿ
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
I	—	93.1	88.6	94.7	90.3	369.4	92.4	92.2
II	—	75.7	71.7	82.0	83.1	312.5	78.1	78.0
III	105.2	108.2	109.4	109.4	—	432.5	108.1	107.8
IV	122.6	121.3	123.3	121.5	—	488.7	122.2	122.0
ಮೊತ್ತ							400.8	400.0

ಹೀಗೆ ತಿದ್ದಿ ಬಂದ ಸರಾಸರಿಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ 9ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಇವೇ ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯ ವಾಂಛಿತ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು.

13 ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧಾನ

ವರ್ಷದ ಪ್ರತಿ ಪಾದದ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಮೇಲೆ ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲು ವಾರ್ಷಿಕ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಗಣಿತ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿ ಅದರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಆಯಾ ವರ್ಷ ಪಾದದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಪ್ರಸಕ್ತ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 5 ವಾರ್ಷಿಕ ಆವೇಕ್ಷಣೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ $y = a + bx$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪೊರ್ದಿಸಿದರೆ $a = 7878$ ಮತ್ತು $b = 662{\cdot}8$ ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಸಮೀಕರಣವು

$$y = 7878 + 662{\cdot}8$$

ಎಂದಾಗುವುದು ; 1956 ರಿಂದ xನ್ನು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಅಳೆಯತಕ್ಕದ್ದು.

ವರ್ಷ ಪಾದಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಸಮೀಕರಣವು ಬೇಕಾದಲ್ಲಿ aನ್ನು 4 ರಿಂದಲೂ b–ನ್ನು $4\times4=16$ ರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ ದೊರೆವ ಸಮೀಕರಣವು ಹೀಗಿರುವುದು :

$$y = 1969{\cdot}5 + 41{\cdot}625x$$

ಇಲ್ಲಿ x–ನ್ನು ಅಳಿವ ಮಾನದ ಏಕ್ಕಂ (unit) ಒಂದು ವರ್ಷಪಾದ (ಅಂದರೆ ಕಾಲು ವರ್ಷ)ವಿರುವುದು ಮತ್ತು ಅಳತೆಯ ಮೂಲಬಿಂದು 1956ರ ಮಧ್ಯಕಾಲ ಅಂದರೆ ಜುಲೈ 1, 1956 ಇರುವುದು ಮತ್ತು y ಎಂಬುದು ವರ್ಷಪಾದದ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಆಗ ತಕ್ಕ ಬಿಕರಿಯ ಮೊಬಲಗು (ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ). ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ವರ್ಷಪಾದದ ನಡುವಾಗದಂತೆ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದು ರೂಢಿ. ಇದ ಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಮೂಲವನ್ನು 1956ನೇ ಇಸ್ವಿಯ ಮೂರನೇ ಪಾದ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳ ಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಅಳತೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ವರ್ಷಪಾದದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಮುಂದಕ್ಕೆ (ಬಲಕ್ಕೆ) ನೂಕಿದಂತಾಗುವುದು. ಆಗ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಸಮೀಕರಣವು.

$$y = 1969{\cdot}5 + 41{\cdot}625(x + \tfrac{1}{2})$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ದಶಮಾಂಶದ ಒಂದು ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಸಂಸ್ಕರಿಸಿದರೆ ಇದು

$$y = 1990{\cdot}3 + 41{\cdot}6x$$

ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುವುದು. (ಮೂಲ : 1956ರ ಮೂರನೇ ಪಾದ ; ಅಳತೆಯ ಏಕ್ಕಂ : ವರ್ಷಪಾದ ; y : ವರ್ಷಪಾದದ ಬಿಕರಿ, ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಗಳಲ್ಲಿ). ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಯದಿಂದ 1954 ರಿಂದ ಹಿಡಿದು 1958ರ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಷ ಪಾದಗಳಿಗೂ ಆಗತಕ್ಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ಬೆಲೆ ಗಳನ್ನು 10·5ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 7ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷಪಾದದ ಮಾರಾಟದ ಮೊಬಲಗು ಮತ್ತು ಆಗಣನೆ ಮಾಡಿದ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆ ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಯನ್ನು 8ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ (100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ) ತೋರಿಸಿದೆ.

ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4ನೇ ವರ್ಷಪಾದಗಳ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು 94·8, 77·2, 106·9 ಮತ್ತು 119·9 ಆಗುವುವು. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ 400 ಇರಬೇಕು. ಆದರೆ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಥಾರ್ಥವಾಗಿ 398·8 ಇರು ವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ (ಉಬ್ಬಿಸಿ) ಮೊತ್ತವು 400 ಬರುವಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಅದರ ಫಲವಾಗಿ ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯ ತೋರಂಕಗಳು 95·1, 77·4, 107·2 ಮತ್ತು 120·3 ಆಗುವುವು.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ರಮಗಳಿಂದ ದೊರೆವ ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ವಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸತಕ್ಕದ್ದು.

14 ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧಗಳ ವಿಧಾನ (Method of Link Relatives)

ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಗಳನ್ನು ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವೊಂದಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವೇಕ್ಷಣೆಯನ್ನೂ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಅವಧಿಯ (period) ಅಥವಾ ಪರ್ವದ ಅವೇಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಂದ ಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು ಶೇಕಡಾ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ: ಅಂದರೆ, ಲಬ್ಧವನ್ನು 100 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧಗಳು ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯ ಕ್ರಮಾಗತ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳಾಗಿರುವುವು. 10·5ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 9ನೇ ಕಲವಿನಲ್ಲಿ ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷಪಾದಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಸ್ಥಾನವು ಖಾಲಿಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅಂದರೆ ಇಡೀ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಕಡಮೆಯಾಗಿರುವುದು; ಪ್ರಥಮ ಪಾದದ ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧಗಳು ನಾಲ್ಕೇನಾಲ್ಕು ಇದ್ದು ಉಳಿದ ಪ್ರತಿಪಾದದ ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧಗಳು 5 ಇರುವುವು: ದತ್ತಾಂಶದ ಹಿಂದಿನ ಪರ್ವ ಅಂದರೆ 1953ನೇ ಇಸ್ವಿಯ ಕೊನೆಯ ಪಾದದ ಅವೇಕ್ಷಣೆ ಯನ್ನು ತಿಳಿದರೆ ಈ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ ಪ್ರಥಮ ಪಾದಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯ ವಾಗುವ 5 ಗುಣಿಕೆ ಬಂಧನಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಮೊದಲನೇ ಪಾದದ ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧದ ನಾಲ್ಕು ಬೆಲೆಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು m_1 ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ; ಹೀಗೆಯೇ, ಎರಡನೇ ಮೂರನೇ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಪಾದಗಳ ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ m_2, m_3 ಮತ್ತು m_4 ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ. ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯ ಸೂಚ್ಯಂಕವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸಲು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸರಪಳಿ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿಯತಕ್ಕದ್ದು. $C_1 = 100$; $C_2 = C_1 \times m_2/100$; $C_3 = C_2 \times m_3/100$; $C_4 = C_3 \times m_4/100$; ಈ C ಗಳಿಗೆ ಸರಪಳಿ ಸಂಬಂಧಗಳು (chain relatives) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಕೊನೆಯದಾಗಿ $C_4 \times m_1/100$ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು C_1' ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಇದರ ಬೆಲೆ 100 ಇರಬೇಕು. ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸಂಬಂಧ ಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಬಗೆಯ ಸಂಸ್ಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು; ಪ್ರತಿ Cಯ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಗುಣೋತ್ತರ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಈ ಸಾಮ್ಯ ಸರಿ ಹೋಗುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ಅಂದರೆ $C_1/C_1' = r^3$ ಎಂದು ಬರೆದು r–ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ತರುವಾಯ C_2, C_3, C_4 ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ r. r^2, r^3 ಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಈ ಉದಾ ಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $C_1' = 107{\cdot}8$ ಇರುವುದು (10·7ನೇ ಕೋಷ್ಟಕ ನೋಡಿ).

ಕೋಷ್ಟಕ 10.7 : ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯ ಗಣನೆ : ಕುಣಿಕೆ ಬಂಧಗಳ ವಿಧಾನ

ವರ್ಷ ಪಾದ	ಸರಾಸರಿ ಕುಣಿಕೆ ಸಂಬಂಧ	ಸರಪಳಿ ಸಂಬಂಧ	ತಿದ್ದಿದ ಸರಪಳಿ ಸಂಬಂಧ	ತಿದ್ದಿದ ಪಾರ್ವಣ ಸಂಬಂಧ
(1)	(2)	(3)	(4)	(6)
I	m_1 76·6	C_1 100·0	100·0	92·5
II	m_2 86·9	C_2 86·9	84·7	78·2
III	m_3 141·9	C_3 123·3	117·2	108·4
IV	m_4 114·5	C_4 140·8	130·5	120·8
ಮೊತ್ತ	419·9	C'_1 107·8	432·4	400·0

ಆದುದರಿಂದ $r^3 = C_1/C_1' = 100/107{\cdot}8 = 0{\cdot}9274$; ಮತ್ತು $r = 0{\cdot}9752$, $r^2 = 0{\cdot}9510$, ಮೇಲೆ ಕಾಣಿಸಿದ C_2, C_3, C_4 ಸರಪಳಿ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು 10·7ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 4ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಇವು ವಾಂಛಿತ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿರುವುವು. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ 400 ಇರಬೇಕು; ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರುವ ಮೇರೆಗೆ ಈ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳನ್ನು ಉಬ್ಬಿಸಿ ಅಥವಾ ಕುಗ್ಗಿಸಿ ಮತ್ತೆ ಸಂಸ್ಕಾರ ಮಾಡಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿದ ಅಂತಿಮ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದ 5ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿದೆ. 10 6ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 9ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತೋರಂಕಗಳೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿದರೆ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳೂ ನಿಕಟವಾಗಿವೆಯೆಂಬುದು ಮಂದಟ್ವಾಗುವುದು.

15 ವಾಣಿಜ್ಯ ಚಕ್ರಗಳು (Business Cycles)

ಕಾಲಸರಣಿಯ ಅವೇಕ್ಷಣೆಗಳು ನಾಲ್ಕು ಘಟಕಾಂಗಗಳ ಸಮ್ಮಿಳಿತದಿಂದ ಲಭಿಸುತ್ತವೆಂದೂ ಇದನ್ನು $Y = T \times S \times C \times I$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದೆಂದೂ ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ್ದೇವೆ. ದೀರ್ಘ ಕಾಲ ಪ್ರವೃತ್ತಿ T ಮತ್ತು ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆ S ಇವುಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನೂ ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಆ ಮೇರೆಗೆ T ಮತ್ತು S ಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದ ಮೇಲೆ ಆ ಪ್ರತಿ ಅವೇಕ್ಷಣೆಯನ್ನೂ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂವಾದಿಯಾದ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ $S \times C \times I$ ಘಟಕಗಳ ಸಂಪೃಕ್ತ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುವುದು. ಹೀಗೆ ಭಾಗಿಸುವ ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ ನಿಷ್ಪ್ರವೃತ್ತಿಕರಣ

ಕೋಷ್ಟಕ 10.8 : ನಿಷ್ಪ್ರವೃತ್ತಿಕೃತ ವಿಪಾರ್ವಣಕೃತ ಬೆಲೆಗಳು

ವರ್ಷ ಪಾದ	ನಿಷ್ಪ್ರವೃತ್ತಿಕೃತ ಬೆಲೆ					ನಿಷ್ಪ್ರವೃತ್ತಿಕೃತ ವಿಪಾರ್ವಣಕೃತ ಬೆಲೆ				
	1954	1955	1956	1957	1958	1954	1955	1956	1957	1958
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
I	1.08	0.88	0.79	1.05	0.94	1.17	0.95	0.85	1.13	1.02
II	0.84	0.70	0.68	0.92	0.73	1.07	0.89	0.86	1.17	0.93
III	1.08	0.96	1.11	1.20	0.99	1.01	0.90	1.04	1.12	0.93
IV	1.21	1.06	1.32	1.29	1.12	1.00	0.88	1.09	1.07	0.93

(detrending) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ದೊರೆತ ಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ನಿಷ್ಪ್ರವೃತ್ತೀಕೃತ (de-trended) ಬೆಲೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 100ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ 10.8ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ (ಪುಟ 132).

ನಿಷ್ಪ್ರವೃತ್ತೀಕೃತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆಯಾ ವರ್ಷಪಾದದ ಪಾರ್ವಣ ಸೂಚ್ಯಂಕಗಳಿಂದ ಮತ್ತೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ C ಮತ್ತು I ಇವುಗಳ ಸಂಪೃಕ್ತ ಬೆಲೆಗಳು ಉಳಿಯುವುವು. ಇವನ್ನು 10·8ನೇ ಕೋಷ್ಟಕದ 5ನೇ ಕಲಮಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಹೀಗೆ ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಯ ಪರಿಣಾಮವನ್ನು ನಿರಸನ ಮಾಡುವ (eliminate) ಅಥವಾ ಅಪಕೃತ ಮಾಡುವ ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ ವಿಪಾರ್ವಣೀಕರಣ (de-seasonalising) ಎಂದು ಹೆಸರು. ನೀಳ್ಗಾಲದ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆಗಳ ವಿಶಿಷ್ಟ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರಸನ ಮಾಡಿದ ನಂತರ ಉಳಿದ ಬೆಲೆಗಳು ಕೇವಲ ವಾಣಿಜ್ಯ ಚಕ್ರ ಮತ್ತು ಅವ್ಯವಸ್ಥಿತ ಏಳು ಬೀಳುಗಳ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ಒದಗುವ ಬೆಲೆಗಳಾಗುವುವು. ಈ ಅವಶಿಷ್ಟ ಸರಣಿಯನ್ನು ಮತ್ತೆ ವಿಘಟನೆ ಮಾಡಿ Cಯನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದರೆ ನಮ್ಮ ಉದ್ದೇಶ ಪೂರ್ತಿಯಾದಂತಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಉಳಿಕೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಸುಸಮ (smooth) ಮಾಡಲಾಗಿ ಕ್ರಮರಹಿತ ಮಾರ್ಪಾಟಿನ ಘಟಕಾಂಗ I ವಿಸರ್ಜಿತವಾಗಿ ವಾಣಿಜ್ಯ ಚಕ್ರ C ಉಳಿಯುವುದು. ಹೀಗೆ ಉಳಿಯುವ ಅಂಶವನ್ನೇ ವಾಣಿಜ್ಯ ಚಕ್ರ ಅಥವಾ ಚಕ್ರೀಯ ತೊನೆದಾಟ ಎಂದು ತಿಳಿಯತಕ್ಕದ್ದು.

ಆಧುನಿಕ ಕಾಲ ಸರಣಿಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಉಳಿಕೆ ಅಂಶವನ್ನು ಆಂದೋಲನ (oscillation) ಎಂದು ಕರೆಯುವುದು ರೂಢಿ. ಚಕ್ರೀಯ ಏರುಪೇರನ್ನು ಆಂದೋಲನದ ಒಂದು ವಿಶಿಷ್ಟ ರೂಪವೆಂದು ಭಾವಿಸತಕ್ಕದ್ದು. ಚಕ್ರೀಯ ತೊನೆದಾಟವನ್ನು ನಿಯಮಿತ ಅಂಶವೆಂದು ಹೇಳುವುದುಂಟು. ಇದಕ್ಕೆ ವಿಪರ್ಯಾಸವಾಗಿ I ನ್ನು ಅನಿಯಮಿತ ಅಂಶ ಅಥವಾ ಯದೃಚ್ಛಾಂಶ (random component) ಎಂದು ಕರೆಯುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10

1. ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೈಗಾರಿಕೆಗಳಿಗೆ ನೀಡಲಾದ ಬ್ಯಾಂಕು ಮುಂಗಡಗಳ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳಿಂದ (7ನೇ ಅಧ್ಯಾಯ 7ನೇ ಪ್ರಕರಣದ 7·6ನೇ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನೋಡಿ) 3 ವರ್ಷದ ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ ಆಲೇಖ (ಗ್ರಾಫ್) ವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
2. ಕೆಳಗಿನ ನ್ಯಾಸಪತ್ರ (ದತ್ತಾಂಶ) 1951 ರಿಂದ 1956 ರವರೆಗೆ ಕಲ್ಲಿದ್ದಲಿನ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮಿಲಿಯನ್ ಟನ್ನುಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಐದು ವರ್ಷದ ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ವರ್ಷ	ಉತ್ಪನ್ನ	ವರ್ಷ	ಉತ್ಪನ್ನ
1951	29	1959	31
1952	29	1960	32
1953	25	1961	34
1954	26	1962	36
1955	29	1963	35
1956	29	1964	36
1957	30	1965	38
1958	30		

3 ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯ ಸರಕಾರ ಜೀವವಿಮೆ ಖಾತೆಯವರು ಕರಾರು ಮಾಡಿಕೊಟ್ಟ ಪಾಲಿಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೀಗಿರುವುದು. ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷದ ಸಂಚಾರಿ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ ತರುವಾಯ ಮಧ್ಯಕೃತ ಸರಾಸರಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಿ ಆಲೇಖದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರಿ.

ವರ್ಷ	ಪಾಲಿಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ವರ್ಷ	ಪಾಲಿಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1955–56	6864	1961-62	8347
1956–57	5335	1962-63	13200
1957–58	9119	1963-64	10582
1958–59	18458	1964-65	7549
1959–60	9746	1965-66	7139
1960–61	12309	1966-67	7558

4 ಭಾರತ ದೇಶದಲ್ಲಾದ ಹತ್ತಿನೂಲಿನ ಉತ್ಪಾದನೆ ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ಪಾದಕ್ಕೂ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇದರಿಂದ ವರ್ಷಪಾದಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಪಾರ್ವಣ ತೋರಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

	ವರ್ಷ	1955	1956	1957	1958
ಪಾದ	I	397	409	438	415
	II	419	421	449	426
	III	398	401	434	408
	IV	430	440	461	436

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ—Glossary

A

Addition ಸಂಕಲನ ; ಸಂಯೋಗ
  a-law ಸಂಕಲನ ನಿಯಮ
Additive ಸಂಕಲನೀಯ ; ಯೌಗಿಕ
Ad hoc ತದರ್ಥ ; ಆದಕ್ಕಾಗಿಯೇ ಅಳವಡಿಸಿದ
Aggregate ಮೊತ್ತ ; ಬೇರೀಜು ; ಸಗಟು
Aggregative method ಬೇರೀಜು ವಿಧಾನ
Antilogarithm ಪ್ರತಿ ಲಘುಗಣಕ ; ಆಂಟಿಲಾಗರಿಥಂ
A posteriori ಹೇತುತಃ; ಫಲಾನುಮೇಯ
Approximate ಸರಿಸುಮಾರಾದ ; ಅಜಮಾಸು
A priori ಫಲತಃ
a priori probability ಪೂರ್ವಸಂಭವತೆ
Area ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ; ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ; ಸಲೆ
Arithmetic mean, Arithmetic average ಗಣಿತ ಮಧ್ಯಮ; ಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ ; ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಮ
Array (noun) ಸಾಲು ; ವರಸೆ ; ಪಾಳಿ; ಅನುವಿನ್ಯಾಸ
Array (verb) ಅನುವಿನ್ಯಾಸ ಮಾಡು ; ವರಸೆಯಲ್ಲಿರಿಸು
Ascending order ಆರೋಹಣಕ್ರಮ ; ಏರುವರಸೆ
Assign ನಿಯೋಜಿಸು ; ನಿಗದಿ ಮಾಡು
Association ಸಹವರ್ತನೆ
Associative (law) ಸಹವರ್ತನೀಯ (ನಿಯಮ)
Auto-correlation ಸ್ವಸಹ ಸಂಬಂಧ

B

Bar ಸಲಾಕಿ
Base ಆಧಾರ ; ತಳ
  b-period ಆಧಾರ ಕಾಲ; ಆಧಾರ ಅವಧಿ
  b-year ಆಧಾರ ವರ್ಷ
Bias ಅಭಿನತಿ
  upward bias ಮೇಲ್ಮುಖ ಅಭಿನತಿ
  downward bias ಕೆಳಮುಖ ಅಭಿನತಿ
Binomial ದ್ವಿಪದ
  b-distribution ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ
  b-theorem ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ
Bivariate ದ್ವಿಚರ; ದ್ವಿಚಲಕ; ದ್ವಿವಿವರ್ತ
Budget ಆಯವ್ಯಯ ಅಂದಾಜು ಪಟ್ಟಿ ; ವೆಚ್ಚದ ಪಟ್ಟಿ
Business cycle ವಾಣಿಜ್ಯ ಚಕ್ರ

C

Cell ಕೋಶಕ; ಅರೆ; ಮನೆ
Centre ಕೇಂದ್ರ
Central ಕೇಂದ್ರೀಯ
  c-limit theorem ಕೇಂದ್ರ, ಪರಿಮಿತಿ ಪ್ರಮೇಯ; ಕೇಂದ್ರಾಭಿಮಿತಿ ಪ್ರಮೇಯ
Circular ವರ್ತುಲಾಕಾರದ
  c-test ವರ್ತುಲ ಪರೀಕ್ಷಣ; ವರ್ತುಳ ಪರೀಕ್ಷಣ
  c-permutation ವರ್ತುಲ ಕ್ರಮಚಯ
Combination ಸಂಚಯ; ಕೂಟ ಭಂಗ; ವಿಕಲ್ಪ
Commutative ಪರಿವರ್ತನೀಯ
Complement ಪೂರಕ

Complementary event ಪೂರಕ ಘಟನೆ
Condition ನಿಬಂಧನೆ ; ಷರತ್ತು
Conditional distribution ಷರತ್ತಿನ ವಿತರಣೆ ; ವಿಧೇಯ ವಿತರಣೆ ; ಅಧೀನ ವಿತರಣೆ
Conditional probability ಅಧೀನ ಸಂಭವತೆ; ವಿಧೇಯ ಸಂಭವತೆ
Continuous ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ
Contrary ವಿಪರ್ಯಾಸ; ವಿರುದ್ಧ
Converge ಅಭಿಸರಿಸು
convergence ಅಭಿಸರಣೆ
Cost of living ಜೀವನ ವೆಚ್ಚ
Correlation ಸಹ ಸಂಬಂಧ
c-cofficient ಸಹ ಸಂಬಂಧ ಗುಣಾಂಕ
Covariance ಸಹ ವಿಚಲನೆ
Cross (noun) ತಳಿಬೆರಕೆ; ಬೆರಕೆ
Cross (verb) ತಳಿಬೆರಕೆ ಮಾಡು ; ಅಡ್ಡ ಬೆರಸು
Cumulation ಪರಿಸಂಕಲನ; ಸಂಚಿತಕರಣ
Cumulative ಪರಿಸಂಕಲಿತ; ಸಂಚಿತ
Curved line ವಕ್ರರೇಖೆ
Current year ಪ್ರಸ್ತುತ ವರ್ಷ; ಪ್ರಚಲಿತ ವರ್ಷ
Cyclical fluctuation ಚಕ್ರೀಯ ತೊನೆದಾಟ

D

Define ವ್ಯಾಖಿಸು; ನಿರ್ವಾಚಿಸು
Definition ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ; ನಿರ್ವಾಚನ
Definite ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ; ಖಚಿತ
Derivation ನಿಗಮನ
Derivative ನಿಷ್ಪನ್ನ
partial d. ಆಂಶಿಕ ನಿಷ್ಪನ್ನ
Descending order ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮ ; ಇಳಿವರಸೆ
Determinateness ನಿರ್ದಿಷ್ಟತೆ; ಖಚಿತತೆ
Deterministic (experiment) ನಿಯಂತ್ರಿತ (ಪ್ರಯೋಗ)
Detrend ನಿಷ್ಪ್ರವೃತ್ತಿಕರಣ
Deviation ಸರಿತ; ವ್ಯತಿಕಲನ
Die ದಾಳ; ಪಾಚಿಕೆ; ನೆತ್ತ
false d. ಕುಟಿಲ ದಾಳ
six-faced d. ಷಣ್ಮುಖ ದಾಳ; ಷಣ್ಮುಖ ನೆತ್ತ
true d. ಸಾಚಾ ದಾಳ
Dimension ಆಯಾಮ
Discrete ವಿರತ; ವಿವಿಕ್ತ
Disjoint ವಿಯುತ
Distribution ವಿತರಣೆ
d. function ವಿತರಣ ಫಲನ
Distributive ವಿತರಣೀಯ
Domain ಪ್ರಾಂತ; ಪ್ರದೇಶ; ನೆಟ್ಟು

E

Eliminate ನಿರಸನ ಮಾಡು; ನಿರಸ್ತ ಮಾಡು
Elimination ನಿರಸನ
Empirical ಅನುಭವಸಿದ್ಧ; ಪ್ರಯೋಗ ಸಿದ್ಧ
Empty ರಿಕ್ತ; ಖಾಲಿ; ಶೂನ್ಯ
e-set ಶೂನ್ಯಗಣ; ರಿಕ್ತಗಣ
Equiprobable ಸಮಸಂಭವ
Error ಭ್ರಂಶ
standard e. ಮಾನಕ ಭ್ರಂಶ
Estimate (noun) ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆ; ಅಗಣಕ; ಅಗಣನೆ
Estimate (verb) ಅಂದಾಜು ಮಾಡು; ಅಗಣಿಸು
Event ಘಟನೆ
compound e. ಸಂಯುಕ್ತ ಘಟನೆ
simple e. ಸರಳ ಘಟನೆ
Event space ಘಟನಾಕಾಶ
Exhaustive ಅಶೇಷ; ಸಂಪೂರ್ಣ; ನಿಖಿಲ
Expectation ನಿರೀಕ್ಷೆ
mathematical e. ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ

Experiment ಪ್ರಯೋಗ
 deterministic e. ನಿಯತಿಯ ಪ್ರಯೋಗ
 random e. ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗ
Exponent ಘಾತಾಂಕ
Exponential ಘಾತೀಯ (ಫಲನ)

F

False die ಕುಟಿಲ ದಾಳ
Family budget ಕುಟುಂಬದ ವೆಚ್ಚಪಟ್ಟಿ
Finite ಪರಿಮಿತ
Fix ಸ್ಥಿರೀಕರಿಸು
Forecast ಮುನ್-ಅಂದಾಜು
Freehand method ಕೈಕರಣ ವಿಧಾನ
Frequency ಆವೃತ್ತಿ; ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ
 f. curve ಆವೃತ್ತಿ ವಕ್ರ
 f. table ಆವೃತ್ತಿ ಸಾರಣಿ
 f. polygon ಆವೃತ್ತಿ ಬಹುಕೋನ
 f. distribution ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ
 relative f. ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ
Function ಫಲನ; ಬಿಂಬಕ

G

Geometric mean ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮ
 weighted g. mean ಭಾರಿತ ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಮ

H

Harmonic mean ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಮ

I

Ideal ಆದರ್ಶ
 i. index number ಆದರ್ಶ ತೋರಂಕ
Identity ತಾದಾತ್ಮ್ಯ; ಸರ್ವಸಮತೆ
Impossible event ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ
Improved method ಸುಧಾರಿತ ವಿಧಾನ
Index ಘಾತಾಂಕ; ಘಾತಸೂಚಿ
Index number ತೋರಂಕ; ಸೂಚ್ಯಂಕ
Inflexion ಪ್ರತಿನಮನ; ನತಿಪರಿವರ್ತನ
Integrable ಅನುಕಲ್ಯ; ಅನುಕಲನೀಯ
Integral ಅನುಕಲ ಫಲನ, ಅನುಕಲ; ಅನುಕಲಿತ
Integrate ಅನುಕಲಿಸು
Integration ಅನುಕಲನ; ಸಮಾಸಕಲನ
Interaction ಅಂತರ ಪ್ರಭಾವ; ಅನ್ಯೋನ್ಯ ಪರಿಣಾಮ
Intersection ಛೇದ; ಛೇದನ
Irregular Kollektiv ಕ್ರಮರಹಿತ ಅನುಕ್ರಮ ಸರಣಿ; ಕ್ರಮರಹಿತ ನೆರವಿ
Irregular variation ಕ್ರಮರಹಿತ ತೊನೆದಾಟ; ಅಡ್ಡಾದಿಡ್ಡಿ ಏಳುಬೀಳುಗಳು

L

Least square method ಕನಿಷ್ಠತಮ ವರ್ಗ ವಿಧಾನ
Logarithm ಲಘುಗಣಕ; ಲಾಗರಿಥಂ

M

Mapping ಬಿಂಬಕ
Marginal distribution ಅಂಚುಕಟ್ಟಿನ ವಿತರಣೆ, ಸೆರಗಿನ ವಿತರಣೆ; ಅರುಗಿನ ವಿತರಣೆ
Mathematical ಗಣಿತದ; (ಸಮಾಸದಲ್ಲಿ) ಗಣಿತ
 m. expectation ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ
 m. model ಗಣಿತ ಪ್ರತಿರೂಪ; ಗಣಿತ ಪಡಿಕಟ್ಟು
 m. probability ಗಣಿತ ಸಂಭವತೆ
Mathematics ಗಣಿತ; ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ
Mean ಮಧ್ಯಮ; ಸರಾಸರಿ
 m. proportional ಮಧ್ಯಮಾನುಪಾತಿ; ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ
Median ಅರ್ಧಕ
Mode ಬಹುಲಕ

Model ಪ್ರತಿರೂಪ; ಪಡಿಕಟ್ಟು
additive m. ಯೌಗಿಕ ಪಡಿಕಟ್ಟು ; ಸಂಕಲನ ಪಡಿಕಟ್ಟು
multiplicative m. ಗುಣಾತ್ಮಕ ಪಡಿಕಟ್ಟು; ಗುಣಕ ಪ್ರತಿರೂಪ
Moving average ಸಂಚಾರೀ ಸರಾಸರಿ
Multiplication ಗುಣನ; ಗುಣಾಕಾರ
Multiplicative ಗುಣಾತ್ಮಕ
m. model ಗುಣಾತ್ಮಕ ಪಡಿಕಟ್ಟು; ಗುಣಕ ಪ್ರತಿರೂಪ
Mutually dependent ಅನ್ಯೋನ್ಯಾವಲಂಬಿ
Mutually exclusive ಪರಸ್ಪರ ಹೊರತಾದ; ಪರಸ್ಪರ ವ್ಯಾವರ್ತಕ

N

Non-negative ಅನೃಣ
Normal distribution ಪ್ರಸಾಮಾನ್ಯ ವಿತರಣೆ
Notation ಸಂಕೇತ
Null set ಶೂನ್ಯಗಣ; ರಿಕ್ತಗಣ

O

Objective ವಸ್ತುನಿಷ್ಠ; ಜ್ಞೇಯಗತ
Ogive ಪರಿಸಂಕಲಿತ; ಓಜೀವ್
Origin ಮೂಲಬಿಂದು
working o. ಕಾರ್ಯಾಂಗ ಮೂಲ ಬಿಂದು
Oscillation ಆಂದೋಲನ

P

Parabola ಪರವಲಯ
Parabolic fit ಪರವಲಯದ ಪೊಂದಿಕೆ
Parameter ಪರಾಮಿತಿ; ಪ್ರಾಚಲ
Percentage ಶೇಕಡಾವಾರು; ಶತಾಂಶ
Period ಅವಧಿ; ಕಾಲಾವಧಿ
Periodic ಆವರ್ತಕ
Permutation ಕ್ರಮಚಯ; ಅಂಕಪಾತ; ಕ್ರಮಯೋಜನೆ
Plot ಅಂಕನ ಮಾಡು
Plotting ಅಂಕನ
Probability ಸಂಭವತೆ
p. density ಸಂಭವ ಸಾಂದ್ರತೆ
p. distribution ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ
p. measure ಸಂಭವ ಅಳವು
p. variate ಸಂಭವ ಚಲಕ; ಸಂಭವ ಚರ
mathematical p. ಗಣಿತ ಸಂಭವತೆ
Product ಗುಣನ ಫಲ; ಗುಣಿತ
Product moment ಗುಣಿತ ಪ್ರಘಾತ
Projecsion ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣೆ
Proportionality test ಅನುಪಾತ ಪರೀಕ್ಷಣ
Power ಘಾತ
Pseudo variate ಹುಸಿಚಲಕ

Q

Quantity ಪರಿಮಾಣ; ರಾಶಿಮಾನ

R

Random ಅನಿಯತ; ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ; ಯದೃಚ್ಛಾ
r. experiment ಯದೃಚ್ಛಾ ಪ್ರಯೋಗ
r. number ಯದೃಚ್ಛಾ ಸಂಖ್ಯೆ
r. order ಯದೃಚ್ಛಾಕ್ರಮ
r. variable ಸಂಭವಚರ; ಸಂಭವ ಚಲಕ
Range ವ್ಯಾಪ್ತಿ; ಬೀಸು
Ratio ನಿಷ್ಪತ್ತಿ
Real ನಿಜ; ವಾಸ್ತವಿಕ
r. number ನಿಜಸಂಖ್ಯೆ; ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ
r. part ನಿಜಾಂಶ; ವಾಸ್ತವಿಕ ಭಾಗ
Regression ಸಮಾಶ್ರಯಣ; ಪ್ರತೀಪಗಮನ; ಹಿಂಚಲನೆ
r. co-efficient ಸಮಾಶ್ರಯಣ ಗುಣಾಂಕ

r. equation ಸಮಾಶ್ರಯಣ;
ಸಮೀಕರಣ
Relative (n) ಸಂಬಂಧಕ;
(adj) ಸಾಪೇಕ್ಷ
r. frequency ಸಾಪೇಕ್ಷ ಆವೃತ್ತಿ
price r. ಧಾರಣೆ ಸಂಬಂಧಕಗಳು
Reversal ಪ್ರತಿಲೋಮ; ಹಿಮ್ಮುಖದ
r. test ಪ್ರತಿಲೋಮ ಪರೀಕ್ಷಣ;
ಹಿಮ್ಮುಖ ಪರೀಕ್ಷಣ
factor r. test ಕಾರಕ ಪ್ರತಿಲೋಮ
ಪರೀಕ್ಷಣ
time r. test ಕಾಲಪ್ರತಿಲೋಮ
ಪರೀಕ್ಷಣ
Root ಮೂಲ; ಘಾತ ಮೂಲ

S

Sample ಪ್ರತಿವರ್ಶ; ನಿದರ್ಶನ;
ಪ್ರತಿಚಯ
s. point ಪ್ರತಿದರ್ಶ ಬಿಂದು
s. space ಪ್ರತಿದರ್ಶಾಕಾಶ
Sampling ಪ್ರತಿದರ್ಶನ; ಪ್ರತಿದರ್ಶಕರಣ;
ಪ್ರತಿಚಯನ
s. with replacement ಪುನಃ
ಸ್ಥಾಪಿತ ಪ್ರತಿದರ್ಶನ; ಮರುಕಳಿಸಿಡುವ
ಪ್ರತಿದರ್ಶನ
s. without replacement ಪುನಃ
ಸ್ಥಾಪನೆರಹಿತ ಪ್ರತಿದರ್ಶನ; ಮರುಕಳಿ
ಸಿಡದ ಪ್ರತಿದರ್ಶನ
Scatter ಚದರಾವಣೆ; ವಿಕೀರಣ
s. diagram ಚದರಾವಣೆಯ ಪರಿಲೇಖ;
ವಿಕೀರಣ ಪರಿಲೇಖ
Seasonal index ಪಾರ್ವಣ ಸೂಚಂಕ
Seasonal variation ಪಾರ್ವಣ ಚಲನೆ
Secular trend ದೀರ್ಘಕಾಲ ಪ್ರವೃತ್ತಿ
Selected point methods ಆಯ್ದ
ಬಿಂದುಗಳ ವಿಧಾನ
Semi-averaging method ಸಮಾರ್ಧ
ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ

Set ಗಣ: ಸಂಕುಲ
Simple ಸರಳ
s. event ಸರಳ ಘಟನೆ
s. result ಸರಳ ಫಲಿತಾಂಶ
s. sampling ಸರಳ ಪ್ರತಿದರ್ಶ
Slope ಓಟ; ವಾಟ
Solution ಒಡಪು; ತೀರಿಕೆ
Solve ಬಿಡಿಸು; ಒಡಚು; ಒಡೆ; ತೀರಿಸು
Spread ಹರವು; ಹರಹು
Square ವರ್ಗ; ಚದರ; ಚೌಕ
s. paper ಚೌಕಳಿ ಕಾಗದ
Standard deviation ಮಾನಕ ವ್ಯತಿ
ಕಲನ; ಮಾನಕ ಸರಿತ
Step ಹಂತ
s. function ಹಂತ ಫಲನ
Stochastic ಸಂಭವದ
s. independence ಸಂಭವ ಸ್ವತಂತ್ರ
s. variate ಸಂಭವ ಚರ; ಸಂಭವ
ಚಲಕ
Subscript ಒತ್ತಕ್ಷರ; ಒತ್ತಂಕ
Subset ಉಪಗಣ; ಉಪಸಂಕುಲ
Subjective ವ್ಯಕ್ತಿನಿಷ್ಠ
Sum ಮೊತ್ತ; ಒಟ್ಟು; ಬೇರೀಜು
Summation ಸಮಾಕಲನ
Symmetric ಸಮ್ಮಿತ; ಸಮಾಂಗ
Symmetry ಸಮ್ಮಿತಿ

T

Telescope ದೂರದರ್ಶಕ; ದುರ್ಬೀನು
Tends to ಉಪಗಮಿಸು
Theorem ಪ್ರಮೇಯ
addition t. ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ;
ಯೋಗ ಪ್ರಮೇಯ
Time reversal test ಕಾಲ ಹಿಮ್ಮುಖ
ಪರೀಕ್ಷಣ; ಕಾಲಪ್ರತಿಲೋಮ ಪರೀಕ್ಷಣ
Time series ಕಾಲಸರಣಿ
Toss ಚಿಮ್ಮು ; ತೂರು
Trial ಯತ್ನ

Two-way frequency distribution ಇಮ್ಮುಖ ಆವೃತ್ತಿ ವಿತರಣೆ
Two-way sable ದ್ವಿಚಲಕ ಕೋಷ್ಟಕ

U

Union ಸಂಯೋಗ; ಯೋಗ
Unit ಏಕಮಾನ; ಒತ್ತೆಮಾನ; ಎಕ್ಕಂ
Unpredictable ಅನಿಯತವಾದ

V

Variable ಚಲಕ; ಚರ; ಚರರಾಶಿ
pseudo v. ಹುಸಿಚಲಕ
Variance ವಿಚಲನೆ
Variate ಚಲಕ; ವಿವರ್ತ
Venn diagram ವೆನ್ ಪರಿಲೇಖ

W

Weight ಭಾರ
(verb) ಭಾರಿತ ಮಾಡು; ಹಚ್ಚಿಸು
Weighted ಭಾರಿತ
w. average ಭಾರಿತ ಸರಾಸರಿ
w. mean ಭಾರಿತ ಮಧ್ಯಮ

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. 9 2. (i) 4 (ii) 12 3. 12 4. 20 5. 30 6. 27

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. (a) 12; 60; 360; 42; 20160; 720; 40320
   (b) 6; 120; 40320; 17280; 2520; 30240

2. 5! 3. (i) 360 (ii) 6! 4. 20160 5. 360 6. 120
7. (a) 6! (b) 7!÷2 (c) 7!÷2 8. 480 9. 14ನೇ 10. 93ನೇ

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. 1260 2. 1512 3. 33650 4. 2063200 5. 30240; 10080 6. 6 7. 24 8. (i) 1440 (ii) 3600

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. 10; 21; 56; 36; 495; 560 2. 55 3. $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$
4. (1) 70 (2) 126 5. 126 6. 60 7. 336 8. (1) 280 (2) 665 9. 1008 10. 1414 11. $10 \times 5! \times 5!$ 12. 94080
13. (i) 280 (ii) 742 14. $105 \times 6!$ 15. $3! \times 31$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1. $1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$;
$1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5$;
$15x^4+32x^3+24x^2+8x+1$;
$\frac{1}{128}x^7-\frac{7}{64}x^6+\frac{21}{32}x^5-\frac{35}{16}x^4+\frac{35}{8}x^3-\frac{21}{4}x^2+\frac{7}{2}x-1$

2. $56x^5$ 3. $-569x^{10}$ 4. 126

ಅಭ್ಯಾಸ 2·1

1. (i) $\{0, 3, 8, 9\}$ (ii) $\{0, 1, 2, 5, 9\}$
   (iii) $\{2\}$ (iv) $\{3, 8\}$
2. (i) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ (ii) $\{2, 3, 6, 7, 9\}$
   (iii) $\{2, 3, 7\}$ (iv) $\{3, 7\}$
3. (i) ನಿಜ (ii) ಸುಳ್ಳು (iii) ನಿಜ (iv) ಸುಳ್ಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 3·1

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{1}{13}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{8}{19}$ 5 (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{11}{36}$
6. $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{9}$ 8. $\frac{11}{36}$ 9. (i) $\frac{1}{12}$ (ii) $\frac{1}{6}$ 10. (i) $\frac{1}{64}$
(ii) $\frac{1}{64}$ (iii) $\frac{22}{64}$ 11. $\frac{1}{2}$ 12. $\frac{1}{4}$ 13. (i) $\frac{1}{12}$ (ii) $\frac{3}{12}$
15. $\frac{3}{10}$ 16. $\frac{4}{190}$ 17. $\frac{1}{16}$ 18. $\frac{32}{81}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 5·1

1. ನಿಟ್ಟು : $\{HH, HT, TH, TT\}$; ಬೀಸು : $\{2, 1, 0\}$.
ಸಂಭವ ವಿತರಣೆ : $P(X=2)=\frac{1}{4}$; $P(X=1)=\frac{1}{2}$; $P(X=0)=\frac{1}{4}$.

2.

x :	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$36p$:	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

3. ಕಪ್ಪು; ಕೆಂಪು; ಹಸಿರು.

$$P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{3}$$

4.

x :	0	1	2	3	4
$126\,p$:	1	20	40	60	5
$126\,F$:	1	21	61	121	126

5.

x :	0	1	2	3
$210\,p$;	35	105	63	7
$210\,F$:	35	140	203	210

6.

x :	0	1	2	3	4	5
$3003\,p$:	1	50	450	1200	1050	252
$3003\,F$:	1	51	501	1701	2751	3003

7. (*a*) $k=49$ (*b*) $\frac{4}{49}$; $\frac{45}{49}$; $\frac{15}{49}$.

x :	0	1	2	3	4	5	6
$49\ p$:	1	3	5	7	9	11	13
$49\ F$:	1	4	9	16	25	36	49

8. 2: a^2 3 : $2ap$ 4 : $2ap+p^2$
5 : $2ap+2p^2$ 6 : $2ap+3p^2$ 7 : $2ab+4p^2$
8 : $2bp+3p^2$ 9 : $2bp+2p^2$ 10 : $2bp+p^2$
11 : $2bp$ 12 : b^2

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. ರೂ. $1\frac{1}{3}$ 2. ರೂ. $1\frac{1}{2}$ 3. ರೂ. 197–50 ಪೈಸೆ

4. (*a*) 6·82; 12·4876· (*b*) 19·65; 105·5275

5. 1; $\frac{1}{3}$ 6. 3·5; 2·9167·

7.

x :	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$36p$:	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

ಗಣಿತ ನಿರೀಕ್ಷೆ=7; ವಿಚಲನೆ=35/6

ಅಭ್ಯಾಸ 6·1

1. 88 2. 11 ಸಲ 3. 0·6982 4. (*a*) 121 (*b*) 18

5. $m=0\ 87$; ಆವೃತ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : 42, 36, 16, 5, 1, 0· 6. 683

ಅಭ್ಯಾಸ 7·1

1. $y=9{\cdot}54+1{\cdot}02x$ 2. $y=5{\cdot}96+0{\cdot}54x$; 7·58 ಲಕ್ಷ.

3. $y=63\ 22+5\ 82X$ ($X=x-1958$); 93·32 ಲಕ್ಷ ಟನ್.

4. 6·16 ಫೌಂಡು. 5. $y=13{\cdot}50+4{\cdot}96x+0{\cdot}08x^2$; 52·14

6. $y=5{\cdot}82+0{\cdot}54X-0{\cdot}07X^2$, (ಇಲ್ಲಿ $X=\dfrac{x-1951}{10}$)

7. $y=61{\cdot}89+5{\cdot}82X+0{\cdot}2X^2$, ($X=x-1958$);
95·99 ಲಕ್ಷ ಟನ್

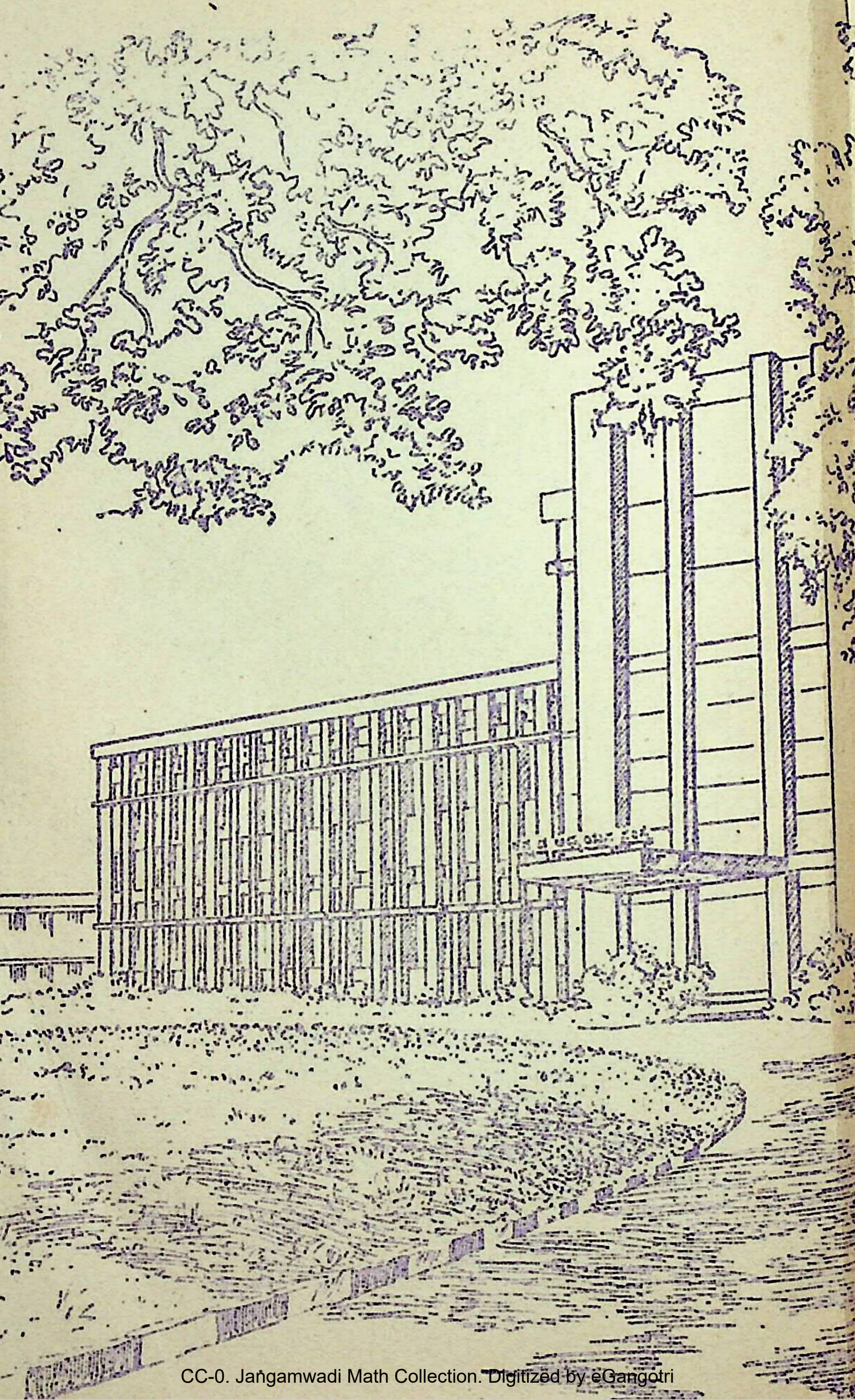
8. $y=8{\cdot}04\ exp\ \{0{\cdot}5261x\}$·

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. 0·944 2. 0·81 3. 0·49 4. 0 898
5. $r=0.92$; $y=0.089x+8.6$ 6. $r=0.6073$; $b=0.6224$; $b'=0.5928$ 7. 0·625 8. $r=0.55$; $x=0.414y+18.62$; $x=33.11$ 9. $r=0.905$; $y=4.91+0.818x$; $x=1.003y-2.03$
10. $r=0.474$; $(y-78.1)\ 1.119=0.5206\times 1.229\ (x-88.4)$; $1.229\ (x-82.4)=0.4319\times 1.119\ (y-78.1)$.
11. 0·7663.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. ಅಕ್ಕಿ ; 120, 155, 220; ರಾಗಿ : 111, 128, 153.
2. 160·03, 172·74. 3. 91·47; 92·63
4. 139·71; 139·24; 139·47; 139·48.
5. 344 6. 368·43. 7. 297·35.





ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ಸಂಸ್ಥೆ

ಪ್ರಿ-ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಮಾಲೆ

ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು

೧ ಭೂಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಐ. ಶ್ರೀ. ಪ್ರಸಾದ

೨ ವಾಣಿಜ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಎಚ್. ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣಸ್ವಾಮಿ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

೩ ಲೆಕ್ಕಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಡಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸಮೂರ್ತಿ

೪ ಇತಿಹಾಸ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಡಾ. ಬಿ. ಷೇಕ್ ಅಲಿ ಮತ್ತು ಇತರರು

೫ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಡಾ. ಜಿ. ಟಿ. ಹುಚ್ಚಪ್ಪ ಮತ್ತು ಇತರರು

೬ ರಾಜ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಎಸ್. ಈಶ್ವರಾಚಾರ್

೭ ಆಧುನಿಕ ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಡಾ. ಕೆ. ಬಿ. ರಾಮಕೃಷ್ಣರಾವ್

೮ ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಎಂ. ನಂಜಮ್ಮಣ್ಣಿ

೯ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಎಚ್. ಜಿ. ಸುಬ್ಬರಾವ್- ಜೆ. ಆರ್. ಲಕ್ಷ್ಮಣರಾವ್

೧೦ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಚಕ್ರವರ್ತಿ–ಶ್ರೀನಾಥ್– ನಾರಾಯಣರಾವ್

೧೧ ಪ್ರಾಣಿಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಡಾ. ಎಚ್. ಬಿ. ದೇವರಾಜ ಸರ್ಕಾರ್

೧೨ ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಸರ್ಕಾರ್-ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ-ಸದಾನಂದ

೧೩ ಸಸ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಎಸ್. ಎನ್. ರಾಮಸ್ವಾಮಿ

೧೪ ಭೂವಿಜ್ಞಾನ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಡಿ. ರಂಗಯ್ಯ

೧೫ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಡಾ. ಬಿ. ಸಂಜೀವಯ್ಯ ಮತ್ತು ಇತರರು

೧೬ ಮನೋವಿಜ್ಞಾನ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಡಾ. ಎಚ್. ಎಸ್. ಈಶ್ವರ್– ಪಿ. ನಟರಾಜ್

೧೭ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರಪರಿಚಯ (ಭಾಗ ೨) : ಡಾ. ಎಂ. ವಿ. ಜಂಬುನಾಥನ್

ಮೇಲ್ಕಂಡ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಷದ ಪ್ರಿ-ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಮಾರಾಟಕ್ಕೆ ಸಿದ್ಧವಾಗಿವೆ.